教育部九十九學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（二）及參考解答

一、設 $A=\left\{(x-y,y-z,z-x)\;\middle|\;\begin{array}{l} x(x-1)+2yz \\ =y(y-1)+2zx, \quad x,y,z\in\mathbb{R} \\ =z(z-1)+2xy \end{array}\right\}$，試求 A。(5 分)

【解】

令 $\begin{cases} x(x-1)+2yz= & ① \\ y(y-1)+2zx= & ② \\ z(z-1)+2xy= & ③ \end{cases}$ 則 $\begin{cases} ①-② =(x-y)(x+y-1-2z)=0 \\ ②-③ =(y-z)(y+z-1-2x)=0 \\ ③-① =(z-x)(z+x-1-2y)=0 \end{cases}$

若 x,y,z 中任二數皆不相等，則

$$\begin{cases} x+y-1\neq 2z \\ y+z-1\neq 2x \\ z+x-1\neq 2y \end{cases}$$

三式相加得 $-3=0$，矛盾。

所以 x,y,z 中至少有兩數相等，設 $x=y$，

若 $y\neq z$，則 $z=2x+1-y=x+1$，

因此 $(x-y,y-z,z-x)=(0,-1,1)$

由對稱性知，若 $x=z$，則 $(x-y,y-z,z-x)=(-1,1,0)$

若 $y=z$，則 $(x-y,y-z,z-x)=(1,0,-1)$

若 $x=y=z$，則 $(x-y,y-z,z-x)=(0,0,0)$

$\therefore\quad A=\{(0,0,0),(0,-1,1),(-1,1,0),(1,0,-1)\}$.

二、記不大於 t 的整數中最大的整數為 $[t]$。求方程 $[x^2-2x]+2[x]=[x]^2$ 在 $0\leq x<3$ 內所有實數解。(5 分)

【解】

$\left[x^2-2x\right]=\left[(x-1)^2-1\right]=\left[(x-1)^2\right]-1$。方程可改寫為

$$[(x-1)^2]=[x]^2-2[x]+1=([x]-1)^2=[x-1]^2 。$$

$[t^2]=[t]^2$ 在 $m\le t<m+1$ 可解如下：

令 $t=m+\delta$，$1>\delta\ge 0$。$[(m+\delta)^2]=m^2+[2m\delta+\delta^2]=m^2$ 當且當 $0\le 2m\delta+\delta^2=(m+\delta)^2-m^2<1$。故 $m^2\le(m+\delta)^2=t^2<m^2+1$。

當 $m<0$，$|m+\delta|\le|m|$，$(m+\delta)^2=t^2\le m^2$，此時只有解 $\delta=0$，$t=m$。

若 $m\ge 0$，$m\le t<\sqrt{m^2+1}$。故方程的解為 $x=0,-1,-2,\ldots$ 或 $m\le x<1+\sqrt{m^2-2m+2}$，$m=1,2,\ldots$，

在 $0\le x\le 3$ 內解為 $x=0$ 或 $1\le x\le 1+\sqrt{2}$。

三、設 a 和 b 為實數，且使方程 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ 至少有一個實根，對所有這種數對 (a,b)，求出 a^2+b^2 的最小可能值。(6 分)

【解】

首先考慮方程

$$x+\frac{1}{x}=y \text{，} y \text{ 為實數。}$$

它等價於 $x^2-yx+1=0$，一個 x 的二次方程，當且僅當判別式 $y^2-4\ge 0$ 時，即 $|y|\ge 2$ 時有實根。

現在解 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$，以 x^2 除之，然後令 $y=x+\frac{1}{x}$，得 $y^2+ay+(b-2)=0$。

這個二次方程根是

$$y=x+\frac{1}{x}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4(b-2)}}{2}$$

其中至少有一個絕對值 ≥ 2，這條件利用三角不等式則是

$$|a|+\sqrt{a^2-4(b-2)}\ge 4.$$

這等價於 $\sqrt{a^2-4(b-2)}\ge 4-|a|$，兩邊平方並減去 a^2 後，我們有 $8|a|\ge 8+4b$；以 4

除之，再平方得 $4a^2 \geq b^2 + 4b + 4$。兩邊加上 $4b^2$ ，我們有 $4a^2 + 4b^2 \geq 5b^2 + 4b + 4$，因此

$$a^2 + b^2 \geq \frac{5}{4}\left(b^2 + \frac{5}{4}b + \frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}\left(b + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}.$$

右邊的最小值當 $b = -\frac{2}{5}$ 時出現，且值是 $\frac{4}{5}$ ，於是 $a^2 + b^2$ 的最小可能值是 $\frac{4}{5}$ 。

四、令 N 為自然數集，若函數 $f: N \to N$ 滿足 $f(n+1) > f(n)$ 且 $f(f(n)) = 3n$，求 $f(54)$。(5 分)

【解】

使用歸納法證明 $f(3^n) = 2\cdot 3^n$, $f(2\cdot 3^n) = 3^{n+1}$, $n \in \square \cup \{0\}$ 成立。

先證 $f(1) \neq 1$

假設 $f(1) = 1$，則 $f(f(1)) = f(1) = 1 = 3\times 1 = 3$ 矛盾。

又因 $f(n+1) > f(n)$，f 是遞增函數。

又因 $f(x) \in N$, $f(1) > 1$

$1 < f(1) < f(f(1)) = 3\cdot 1 = 3$

$n = 0$ 時(a), (b)成立

假設 $n = k$ 時，(a), (b)成立

因此 $f(3^k) = 2\cdot 3^k$ ， $f(2\cdot 3^k) = 3^{k+1}$

$f(3^{k+1}) = f(f2\cdot 3^k)) = 3\cdot 2\cdot 3^k = 2\cdot 3^{k+1}$

$f(2\cdot 3^{k+1}) = f(f(3^{k+1})) = 3\cdot 3^{k+1} = 3^{k+2}$

$n = k+1$ 時，(a), (b)成立；

由歸納原理知對所有 $n \in N$, (a), (b)成立；

故 $f(54) = f\ (2^3\ = 81.$