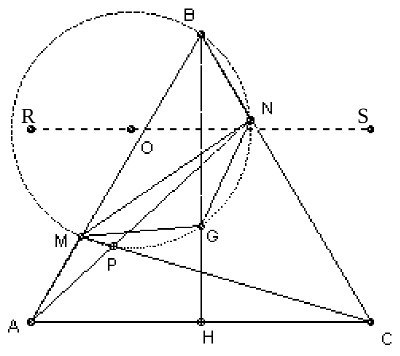
教育部九十九學年度高級中學數學競賽
台中區複賽試題（一）及參考解答

一、ΔABC 為等邊三角形，P 為其內一動點，且 $\angle APC = 120^\circ$。AP 交 BC 於 N、CP 交 AB 於 M。求 ΔBMN 外心 O 的軌跡。(12 分)

【解】

令 G 為 ΔABC 的外心。因 $\angle MPN = \angle APC = 120^\circ$ 與 $\angle B$ 互補，P 在 ΔBMN 的外接圓上。

因 $\angle APC = \angle AGC = 120^\circ$，$A$、$P$、$G$、$C$ 共圓，且 $\angle CPG = \angle CAG = 30^\circ$。而 $\angle MBG = 30^\circ$，故 B、M、G、N 共圓，即 G 在 ΔBMN 的外接圓上。因此，O 在 BG 的中垂線 L 上。作對 AC 的兩垂線，垂足分別為 A 及 C，它們分別交 L 於 R、S。則 O 的軌跡是線段 RS，不含 R、S。理由如下：設 O 為 RS 內一點，且與 A 在 BH 的同一邊（另一情形對稱），因 $OB < \frac{2}{3}\sqrt{3} = RA$，$90^\circ > \angle OBC \geq 30^\circ$，以 O 為中心，半徑為 OB 的圓 O，分別交 AB、BC 內點 M 及 N。明顯 G 在圓 O 上，且 AN 在 AG 與 AB 間，AN 與圓 O 交於一點 P。因 $\angle CPG = \frac{1}{2}\angle B = 30^\circ = \angle CAG$，$A$、$P$、$G$、$C$ 共圓，$\angle APC = 120^\circ$。又 $\angle APM = \angle B = 60^\circ$，$CPM$ 共線。故 P 為 AN 與 CP 的交點，P 在 ΔABC 內。



二、任意選 24 個相異且小於 88 的正奇數，試證：其中必有兩個數它們的

和是 90。(12 分)

【證】

小於 88 的正奇數有 44 個：

{1 , 3·;· 5 ,}

將這個集合分割成不相交子集

{ 1 } , { 3 , 8 7 } , {·5 , 8 5 } , {

共有 23 個子集，而 24 個正奇數必須分配到這 23 個子集中，故必有兩個正奇數在同一子集。但在以上的兩個元素子集的和都是 90。因此命題得證。

三、試證：對實數 $a,b,c,d \ge 0$，

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\left(d^2+2\right) \ge 4\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+d\right)\left(d+a\right)$$ 。(12 分)

【解】

由 Cauchy 不等式得 $(a^2+2)(b^2+2) \ge (\sqrt{2}a+\sqrt{2}b)^2 = 2(a+b)^2$ 。故

$$\left[(a^2+2)(b^2+2)\right]\left[(b^2+2)(c^2+2)\right]\left[(c^2+2)(d^2+2)\right]\left[(a^2+2)(d^2+2)\right]$$

$\ge 16(a+b)^2(b+c^2)(c+d)^2(d+a)^2$

得證。

四、定義：設 A 是二階整係數方陣，若存在二階整係數方陣 B，使得 $AB = BA = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，則稱 A 可逆。(13 分)

(1) A 是二階整係數方陣。試證：A 可逆的充要條件為 A 的行列式 $|A| = \pm 1$。

(2) 設 A, B 均為二階整係數方陣，且 $A, A+B, A+2B, A+3B, A+4B$ 均可逆，試證：$A+5B$ 亦可逆。

【解】

(1) $|AB| = |A||B| = 1 \quad \therefore \ |B| = \dfrac{1}{|A|} \in □ \Rightarrow |A| = \pm 1$

若 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，且 $|A| = \pm 1$，則

$B = \pm \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 滿足 $AB = I = BA \quad \therefore \ A$ 可逆

(2) 令 $f(x) = |A + xB|$，由(1)知 $x \in \{0,1,2,3,4\} = S$ 對 $f(x) = \pm 1$

因 $\deg \ f \le 2$，所以 f 最多有 2 相異根

由鴿巢原理知：至少有 3 個 $x \in S$，使得 $f(x) = 1$（或 -1）

$\Rightarrow \ f(x) - 1 = 0$ 至少有 3 相異根 $\Rightarrow f(x)$ 為常函數

$\therefore \ f(x) = |A + xB| = |A| \quad \forall \ x \in □$

$\therefore \ |A + 5B| = \pm 1 \quad \Rightarrow A + 5B$ 可逆。