

九十九學年度台灣省(台南區) 高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題

口試(一)試題及參考解答

1. 球 C_1 與 4 個平面 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=0$ 、 $x+2y+2z=16$ 相切且坐落在這 4 個平面所圍之四面體之內。球 C_2 與 3 個平面 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=0$ 相切，又與球 C_1 相切。球 C_3 與 3 個平面 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=0$ 相切，又與球 C_2 相切。依此方式，我們有無限多個球 C_1 、 C_2 、 C_3 ...。設球 C_n 的半徑為 r_n ， $n=1, 2, 3, \dots$ ，試求 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2$ 。

Sol: 設 C_1 的球心為 $O_1(r_1, r_1, r_1)$ ，則 O_1 至平面 $x+2y+2z=16$ 的距離為 $|r_1+2r_1+2r_1-16|/\sqrt{9}=r_1$ 。求得 $r_1=2$ or 8 (不合)。
設 C_2 的球心為 $O_2(r_2, r_2, r_2)$ ，則 O_2 至 O_1 的距離為 $\sqrt{3}(r_1-r_2)$ ，因此，
 $\sqrt{3}(r_1-r_2)-r_1=r_2$ 。
可得 $r_2=(\sqrt{3}-1)/(\sqrt{3}+1)r_1=(2-\sqrt{3})r_1$ 。

口試(二)試題及參考解答

2. 令 $P(x)$ 為一多項式 且 $P(x+1)+P(x-1)=2x^2-2x+4$ ；試求 $P(x)$

Sol: 可設 $P(x) = x^2 + bx + c$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x + 4 = P(x+1) + P(x-1)$$

$$= \left[(x+1)^2 + b(x+1) + c \right] + \left[(x-1)^2 + b(x-1) + c \right]$$

$$= 2x^2 + 2b + 2c$$

$$\Rightarrow b = -1 \quad c =$$

$$\Rightarrow P(x) = x^2 - x + 1$$