九十九學年度台灣省第三區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題及參考解答

問題一： 設 $\overline{AB}$ 為圓 $x^2+y^2=37$ 的一弦，若點 $P(1,2)$ 在 $\overline{AB}$ 上，且為 $\overline{AB}$ 的三等分點之一，試求直線 AB 的方程式。 (16 分)

解： 因為 $\overline{AB}$ 為圓之一弦且過 $P(1,2)$ ，所以可設 A,B 的坐標參數式為

$$\begin{cases} x=1+t\cos\alpha \\ y=2+t\sin\alpha \end{cases}$$ (仿圓之坐標參數式)。

將此代入圓的方程式得到

$$(1+t\cos\alpha)^2+(2+t\sin\alpha)^2-37=0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2+(2\cos\alpha+4\sin\alpha)t-32=0$$

事實上，此方程式之兩根即為 $\overline{PA}, \overline{PB}$ 之有向長度（可為負數）。由根與係數關係可知 $\overline{PA}+\overline{PB}=-(2\cos\alpha+4\sin\alpha)$, $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=-32$ 。又由 P 為 $\overline{AB}$ 的三等分點之一，故 $\overline{PA}=-2\overline{PB}$ 。因此 $-2\left(\overline{PB}\right)^2=-32 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{PB}=\pm4, \quad \overline{PA}=\mp8$ 。

(1) 當 $\overline{PB}=4, \quad \overline{PA}=-8$ 時，則有 $-4=-(2\cos\alpha+4\sin\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha=2-2\sin\alpha$

平方後 $\cos^2\alpha=4-8\sin\alpha+4\sin^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 1-\sin^2\alpha=4-8\sin\alpha+4\sin^2\alpha$ ，

故 $(5\sin\alpha-3)(\sin\alpha-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha=\dfrac{3}{5}, \quad \sin\alpha=1$ 。

(i)若 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ ，則 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ 且 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$ ，所以直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式為

$$y-2=\frac{3}{4}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 3x-4y+5=0 \text{ 。}$$

(ii)若 $\sin\alpha=1$ ，則 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ ，所以直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 y 軸平行，即方程式為 $x=1$ 。

(2) 當 $\overline{PB}=-4, \quad \overline{PA}=8$ 時，則有 $4=-(2\cos\alpha+4\sin\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha=-2-2\sin\alpha$

平方後 $\cos^2\alpha=4+8\sin\alpha+4\sin^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 1-\sin^2\alpha=4+8\sin\alpha+4\sin^2\alpha$ ，

故 $(5\sin\alpha+1)(\sin\alpha+3)=0 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha=-\dfrac{1}{5}, \quad \sin\alpha=-3$ 。

(i)若 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{5}$ ，則 $\cos\alpha=-\dfrac{8}{5}$ ，不合。

(ii)若 $\sin\alpha=-3$，不合。

由上可知，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式為 $3x-4y+5=0$ 或 $x=1$。

問題二： 將 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 分成 3 組三位數，使它們滿足下列運算式：

□□□ + □□□ = □□□ ，

即每一格只能填入 1 至 9 的數字，且不能重複，例如：$125+739=864$。

試問滿足條件的分組方式共有多少種？ (16 分)

解： 為了方便，假設 $b_1b_2b_3 + b_4b_5b_6 = b_7b_8b_9$。

(a) 由於 $\sum_{k=1}^{9} b_k = 45$，若三個位數皆無進位，則 $\sum_{k=1}^{6} b_k = \sum_{k=7}^{9} b_k = \frac{45}{2}$ 不合。

若個位數及十位數皆進位，則 $\sum_{k=1}^{6} b_k - 18 = \sum_{k=7}^{9} b_k = \frac{45-18}{2} = \frac{27}{2}$ 也不合。

因此，一定只有一位數進位，所以 $\sum_{k=1}^{6} b_k - 9 = \sum_{k=7}^{9} b_k = \frac{45-9}{2} = 18$。

(b) 3 個數字相加等於 18 只有 189, 279, 369, 459, 378, 468,567 七種。經過仔細列舉，可能的情形如下所示：

189 : 235+746=981, 324+657=981, 234+657=891, 324+567=891

279 : 134+658=792, 314+658=972

369 : 215+748=963152+784=936

459 : 317+628=945, 127+368=495, 216+738=954, 216=378=594

378 : 214+659=873, 214+569=783, 124+659=783

468 : 125+739=864, 127+359=486, 317+529=846

576: 219+348=567, 129+438=567, 419+238=657, 438+219=657

共 22 種不同構的情況，每一種可以重新排列出 8 種，所以共 $22\times 8 = 176$ 種情況。

問題三： 設無窮數列 $\langle a_n \rangle$: 121, 1221, 12221, ⋯⋯，其一般項 $a_n = 122\cdots 21$ (兩個 1 知間恰有 n 個 2)；並設集合 S 表示同時滿足以下兩條件的正整數 k 所成的集合：

(1) $k \in \{1, 2, 3, \cdots, 2010\}$；

(2) 數列 $\langle a_n \rangle$ 中有無限多項是 k 的倍數。

(a) 試說明 $99 \in S$。 (5 分)

(b) 試求集合 S 中所有數的和。 (12 分)

解：(a) 觀察 $a_1 = 11\times 11, a_2 = 11\times 111, a_3 = 11\times 1111, \cdots$，一般而言，

$a_n = 122\cdots 21 = 11\times b_n$，其中 $b_n = 111\cdots 1$ (恰有 $n+1$ 個 1)。

顯然，$b_8 = 111111111 = 9\times 12345679$ 是 9 的倍數，因此，

$a_8 = 1222222221 = 11\times b_8$ 是 99 的倍數。同理，$b_{17}, b_{26}, b_{35}, b_{44}, \cdots$ 也都是 9 的倍數；得知 $a_8, a_{17}, a_{26}, a_{35}, a_{44}, \cdots$ 都是 99 的倍數。

事實上，數列 $\langle b_n\rangle$ 中有一項是 k 的倍數就會有無限多項是 k 的倍數，因為 $k\,|\,b_n \Rightarrow k\,|\,b_{n+m(n+1)}$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$。

(b) 若正整數 k 與 10 不互質，則 k 為 2 或 5 的倍數，此時，數列 $\langle a_n\rangle$ 中就沒有一項是 k 的倍數。

當 k 與 10 互質時，以下證明數列 $\langle b_n\rangle$ 中必有一項是 k 的倍數：

令 c_n 是 b_n 除以 k 的餘數 $(n = 1, 2, 3, \cdots, k+1)$，則

$c_1, c_2, \cdots, c_{k+1} \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, k-1\}$，由鴿籠原理，必有某兩 c_i, c_j 滿足：

$c_i = c_j$，其中 $j > i$。此時，

$$k\,|\,b_j - b_i = 111\cdots 100\cdots 0 = b_{j-i-1}\times 10^{i+1}。$$

又 k 與 10 互質，故 $k\,|\,b_{j-i-1}$。因此，數列 $\langle b_n\rangle$ 中有一項是 k 的倍數，於是，數列 $\langle b_n\rangle$ 中就有無限多項是 k 的倍數；自然，$\langle a_n\rangle$ 中就會有無限多項是 k 的倍數。因此，S 中所有可能的正整數之和為

$$(1+3+5+\cdots+2009) - (5+15+25+\cdots+2005) = 808020。$$