九十九學年度台灣省第三區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題及參考解答

【試題 1】 安排 n 個人進入 A, B, C 三間房間，A 房間必須有奇數個人，試問有幾種不同的安排方法？

【解答】

(1) 若 n 為奇數，則進入房間 A 的有可能$1,3,5,\dots,n$人，其他再安排入 B, C 房，共有

$$\begin{aligned}&C_1^n 2^{n-1}+C_3^n 2^{n-3}+C_5^n 2^{n-5}+\cdots+C_n^n 2^0\\ &=2^0 C_0^n+2^2 C_2^n+\cdots+2^{n-1}C_{n-1}^n\\ &=\frac{(1+2)^n+(1-2)^n}{2}=\frac{3^n-1}{2}\end{aligned}$$

(2) 若 n 為偶數，則進入房間 A 的有可能$1,3,5,\dots,n-1$人，共有

$$\begin{aligned}&C_1^n 2^{n-1}+C_3^n 2^{n-3}+C_5^n 2^{n-5}+\cdots+C_{n-1}^n 2^1\\ &=2^1 C_1^n+2^3 C_3^n+\cdots+2^{n-1}C_{n-1}^n\\ &=\frac{(1+2)^n-(1-2)^n}{2}=\frac{3^n-1}{2}\end{aligned}$$

因此，不論 n 為奇數或偶數，兩者皆為 $\frac{3^n-1}{2}$ 種不同的安排方法。

【試題 2】 設 $a_k=k(k+1),\ k=0,1,2,3,\cdots$，若函數 $P:[0,\infty)\to\{0,1,2,3,\cdots\}$ 定義如下：

$$P(x)=\begin{cases}0, & \text{當 } a_0\le x<a_1\\ 1, & \text{當 } a_1\le x<a_2\\ 2, & \text{當 } a_2\le x<a_3\\ \vdots & \\ k, & \text{當 } a_k\le x<a_{k+1}\\ \vdots & \end{cases}$$ 。

試求一函數 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ ，使得 $P(x)=\left[f(x)\right]$，其中[ ]表高斯符號。

【解答】

【口試 2】 由 $k(k+1)\le x$ ，得 $(k-\frac{-1-\sqrt{1+4x}}{2})(k-\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2})\le 0$ ，解得

$$\frac{-1-\sqrt{1+4x}}{2}\le k\le\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$$ 。

同理，由 $x<(k+1)(k+2)$ ，得 $(k-\frac{-3-\sqrt{1+4x}}{2})(k-\frac{-3+\sqrt{1+4x}}{2})>0$ ，

可解得 $k > \dfrac{-3+\sqrt{1+4x}}{2}$。因此，$\dfrac{-3+\sqrt{1+4x}}{2} < k \le \dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$。

於是，$\left[\dfrac{-3+\sqrt{1+4x}}{2}\right]+1 \le k \le \left[\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}\right]$。

又 $\left[\dfrac{-3+\sqrt{1+4x}}{2}\right]+1=\left[\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}\right]$，故取 $f(x)=\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$，可得

$$P(x)=k=\left[\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}\right]=[f(x)]。$$