九十九學年度
高級中學數學科能力競賽複賽試題
南區（高雄區）　　筆試（一）{參考解答}

一、若兩互質的整數係數多項式 $P(x)$與 $Q(x)$滿足$\dfrac{P(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})}{Q(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，則 $P(x)$ 與 $Q(x)$為何？

【參考解答】

令 $s=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}$，考慮整數係數多項式 $A(x)$與 $Q(x)$滿足

$\dfrac{A(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})}{Q(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})}=\dfrac{A(s)}{Q(s)}=\sqrt{7}$，則所求 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=s-\sqrt{7}=s-\dfrac{A(s)}{Q(s)}$

所以，x=s 是 $A(x)-\sqrt{7}Q(x)=0$ 方程式的解。考慮整數係數多項式 $B(x)$以消去$\sqrt{2}$ 及$\sqrt{3}$兩項，

$B(x)=(x-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{7})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{7})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})$ 所
$=A(x)-\sqrt{7}Q(x)$

以，化簡 $B(x)$ 得

$$\begin{aligned}
&[(x-\sqrt{7})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2]\cdot[(x-\sqrt{7})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2]\\
&=[(x-\sqrt{7})^2-5-2\sqrt{6}]\cdot[(x-\sqrt{7})^2-5+2\sqrt{6}]\\
&=[(x-\sqrt{7})^2-5]^2-(2\sqrt{6})^2\\
&=(x^2-2\sqrt{7}x+2)-24\\
&=(x^4+32x^2-20)-\sqrt{7}(4x^3+8x)
\end{aligned}$$

得 $A(x)=x^4+32x^2-20$ 及 $Q(x)=4x^3+8x$

所以，$\sqrt{2}+\sqrt{3}=s-\sqrt{7}=s-\dfrac{A(s)}{Q(s)}=s-\dfrac{s^4+32s^2-20}{4s^3+8s}=\dfrac{3s^4-24s^2+20}{4s^3+8s}$

得 $\boxed{P(x)=3x^4-24x^2+20 \text{ 及 } Q(x)=4x^3+8x}$。

二、 若 n 為大於 3 的正整數，試求出所有能整除 $(n-3)!$ 的 n。（請詳述妳(你)所得答案的理由）

【參考解答】

若 n 為質數，則 n 不整除 $(n\text{-}3)!$。

考慮 n 不為質數。

若 $n = 4$，則 $(n\text{-}3)! = 1$，此時 n 不整除 $(n\text{-}3)!$。

若 $n > 5$。

因 n 不為質數，故存在 p 與 q 使得 $n = pq$，$1< p< n$，$1< q< n$。

若 $p > n\text{-}3$，因 $q\geq 2$，可知 $n = pq > 2(n\text{-}3)$，即 $n < 6$，與 $n > 5$ 不合。

故可假設 p 與 q 皆小於或等於 $n\text{-}3$。

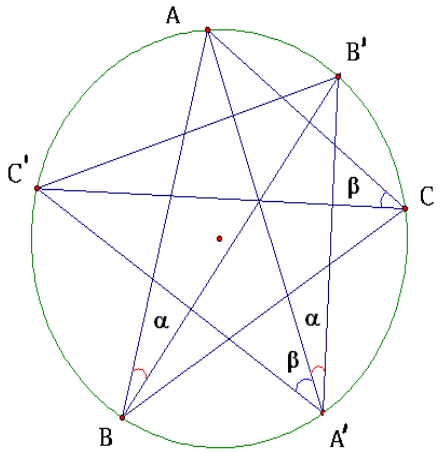
若 $p \neq q$，則 p 與 q 為 $1, 2,\ldots , n\text{-}3$ 之中的兩個相異整數。故 $n = pq$ 能整除 $(n\text{-}3)!$。

若 $p = q$，因 $n > 5$，可知 $p > 2$。所以 $n\geq 3p\geq 2p+p\geq 2p+3$。

則 p 與 $2p$ 為 $1, 2,\ldots , n\text{-}3$ 之中的兩個相異整數。故 $n= pq$ 能整除 $(n\text{-}3)!$。

因此除了 4 之外，其他不為質數且大於 3 的 n 皆可整除 $(n\text{-}3)!$。

三、ΔABC 中 $\angle A, \angle B,$ 及 $\angle C$ 的內角平分線分別與 ΔABC 的外接圓交於點 $A', B',$ 及 C'。 試證：$\Delta A'B'C'$ 的面積大於或等於 ΔABC 的面積。



【參考解答】

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}(2R\sin B)(2R\sin C)\sin A = 2R^2\sin A\sin B\sin C$$

$\angle A' = \alpha+\beta = \frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$ 同理，$\angle B' = \frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$，$\angle C' = \frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$

$$\Delta A'B'C' = 2R^2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}$$

由於，$2\sin\frac{A+B}{2} \geq 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \sin A+\sin B$

同理，$2\sin\frac{B+C}{2} \geq \sin B+\sin C,\ 2\sin\frac{C+A}{2} \geq \sin C+\sin A$

所以，

$$
\begin{aligned}
\Delta A'B'C' &= 2R^2 \sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2} \\
&\ge \frac{R^2}{4}(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A) \\
&\ge \frac{R^2}{4}(2\sqrt{\sin A\sin B})(2\sqrt{\sin B\sin C})(2\sqrt{\sin C\sin A}) \\
&= 2R^2\sin A\sin B\sin C = \Delta ABC
\end{aligned}
$$

四、若 $f(x)$ 為實數函數且滿足 $f(x-1)-f(x+2)[f(x-1)+1]-1=0$ 及 $f(x)\neq\pm1$，則 $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)\times\cdots\cdots\times f(2038)\times f(2039)\times f(2040)$ 之值為何？

【參考解答】 $f(x-1)=\dfrac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)}$

$f(x-4)=\dfrac{1+f(x-1)}{1-f(x-1)}$

因此 $\dfrac{f(x-4)-1}{f(x-4)+1}=\dfrac{1+f(x+2)}{1-f(x-2)}$

所以 $f(x-4)f(x+2)=-1$

得 $f(x+2)f(x+8)=-1$

故 $f(x-4)=f(x+8)$，即 $f(x)$ 的週期為 12

又因為 $f(x+2)f(x+8)=-1$

所以 $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)\times\cdots\cdots\times f(12)=1$

$2040=12\times170$

因此 $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)\times\cdots\cdots\times f(2038)\times f(2039)\times f(2040)=1$