台北市九十八學年度

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試一參考解答）

問題一：

注意 $729=9^3$，故 9^n 在 $n\geq 3$ 時可被 729 整除。

故 a_{99} 除以 729 的餘數等於 $8^{99}+10^{99}$ 除以 729 的餘數，

但 $8^{99}+10^{99}=(9-1)^{99}+(9+1)^{99}$

$= \left(9^{99}-\binom{99}{1}9^{98}+\cdots+\binom{99}{98}9-1\right)+\left(9^{99}+\binom{99}{1}9^{98}+\cdots+\binom{99}{98}9+1\right)$

$= 2\times 9^3\times\left(9^{96}+\binom{99}{2}9^{94}+\cdots+\binom{99}{96}\right)+2\cdot 99\cdot 9$

於是 $a_n=8^n+9^n+10^n=729k+1782, k\in\mathbb{N}$

而 a_{99} 除以 729 得餘數等於 1782 除以 729 的餘數為 324

問題二：

$$r_1=1,\ r_2=3,\ r_3=6,\ r_4=0,\ r_5=5,\ r_6=1,\ r_7=8,\ r_8=6,\ r_9=5,\ r_{10}=5,$$
$$r_{11}=6,\ r_{12}=8,\ r_{13}=1,\ r_{14}=5,\ r_{15}=0,\ r_{16}=6,\ r_{17}=3,\ r_{18}=1,\ r_{19}=0,\ r_{20}=0.$$

又 $a_{20+k}-a_k=\dfrac{(20+k)(20+1+k)}{2}-\dfrac{k(k+1)}{2}=200+(2k+1)10$

則 $r_{20+k}=r_k, k=1,2,\cdots$。

故 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2009}r_k=r_1+...+r_{2009}=100\times(r_1+...+r_{20})+(r_1+...+r_9)=100\times 70+35=7035$。

問題三：

(1) 欲使平面 α 將立方體 Γ 截成一個包含 E 點之四面體，平面 α 必須與 $\overline{EF},\overline{DE},\overline{OE}$ 三個邊相交異於 E 點之三個點 P,Q,R。首先，解出點 P,Q,R 之坐標：$P\left(\dfrac{1+k}{5},0,1\right),\ Q\left(0,\dfrac{1+k}{2},1\right),\ R\left(0,0,-k\right)$。

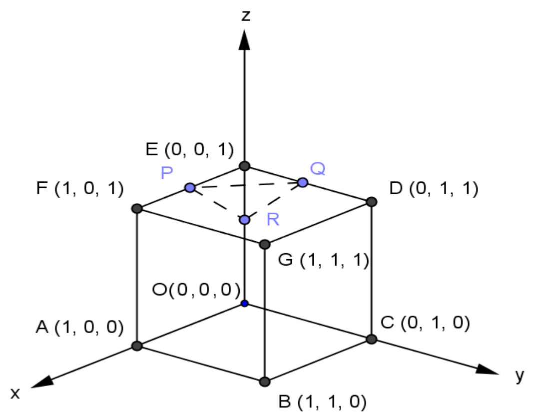
依題意，則必須有$\begin{cases} 0<\dfrac{1+k}{5}\le 1 \\ 0<\dfrac{1+k}{2}\le 1 \\ 0\le -k<1 \end{cases}$，故得到$k$的範圍為$-1<k\le 0$。

(2) 已知四面體之體積為 1/3(底面積)(高)，又可求得E點至平面α之距離為

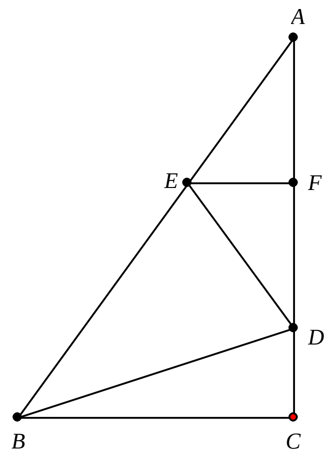
$\dfrac{|-1-k|}{\sqrt{5^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{1+k}{\sqrt{30}}$ （因為由(1)知$k+1>0$）。

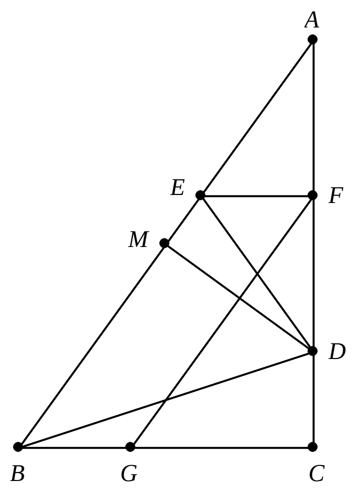
設截面ΔPQR之面積為S，則有$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1+k}{\sqrt{30}}\cdot S=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+k}{5}\cdot\dfrac{1+k}{2}\cdot(1+k)$。

由此可解得$S=\dfrac{\sqrt{30}(1+k)^2}{20}$。



問題四：





(1) 因為$\angle BAC=36^\circ$，所以，$\angle ABC=54^\circ$且

$$\overline{AC}=\overline{AB}\sin 54^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\times\overline{AB}\text{ 。}$$

另一方面，在$\triangle DAB$應用正弦定律，可得

$$\overline{AF}=\frac{\overline{AD}}{2}=\frac{\overline{AB}\sin 36^\circ}{2\sin 108^\circ}=\frac{\overline{AB}\sin 36^\circ}{2\cos 18^\circ}=\overline{AB}\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\overline{AB}\text{ 。}$$

綜合上述兩式，得

$$\overline{CF}=\overline{AC}-\overline{AF}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\times\overline{AB}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{AB}\text{ 。}$$

(2) 設 M 是 $\overline{AB}$ 的中點。因為 $\angle ABD=\angle BAD$，所以，$\angle AMD=90^\circ$。在 $\overline{BC}$ 上選取點 G 使得 $BEFG$ 為平行四邊形。因為 $\overline{AB}=2\overline{CF}$，所以，$\overline{AM}=\overline{FC}$。因為 $\overline{FG}$ 平行於 $\overline{AM}$，所以，$\angle DAM=\angle GFC$。於是，$\triangle AMD$ 與$\triangle FCG$ 全等。由此可知：

$$\overline{AD}=\overline{FG}\text{ 。}$$

因為 $\overline{BE}=\overline{FG}$ 且 $\overline{BD}=\overline{AD}$，所以，得

$$\overline{BE}=\overline{FG}=\overline{AD}=\overline{BD}\text{ ，}\quad \angle BDE=\angle BED=2\angle BAC\text{ 。}$$

因為 $\angle DBE=\angle BAC$，所以，考慮$\triangle BDE$ 的內角之和，得

$$5\angle BAC=180^\circ\text{ ，}\quad \angle BAC=36^\circ\text{ 。}$$