九十八學年度台灣省第七區(台南區)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試一參考解答）

1. 設過 $(1,2)$ 直線方程式為 $y-2=m(x-1)$，其中 $m\neq 0$，

   與雙曲線 $xy=1$ 交於 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$ 兩點。

   消去 y，得 x_1、x_2 滿足方程式 $mx^2-(m-2)x-1=0$

   $\therefore\ x_1+x_2=\dfrac{m-2}{m}$ ， $x_1x_2=-\dfrac{1}{m}$

   又 $y_1+y_2=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2-m$ 及 $y_1y_2=\dfrac{1}{x_1x_2}=-m$

   線段 $\overline{PO}$ 長為 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

   $\because\ (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=\dfrac{m^2+4}{m^2}+(m^2+4)=\dfrac{m^4+5m^2+4}{m^2}$

   且 $m^2>0$ $\therefore$ $m^2+5+\dfrac{4}{m^2}\geq 5+2\sqrt{m^2\cdot\dfrac{4}{m^2}}=9$

   $\rightarrow$ 得知 $\overline{PQ}$ 最小值為 3 。

2. 答： $n=144, k=127$

   將不等式分子及分母顛倒，化簡得 $\dfrac{8}{9}>\dfrac{k}{n}>\dfrac{7}{8}\Rightarrow 64n>72k>63n$

   自 $63n$ 至 $64n$ 之間共有 $n-1$ 個正整數，但題意知這 $n-1$ 個正整數之中僅有一個是 72 的倍數。

   如果 $n-1\geq 2\times 72$，則此 $n-1$ 個正整數之中至少有二個是 72 的倍數。

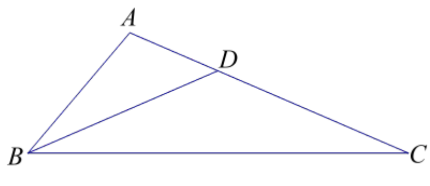
   因此，滿足條件 n 的最大值為 144，故 $k=127$ 。

3. 如圖

（1）作 $\angle ABC$ 之平分線交 $\overline{AC}$ 於 D 點

$\because \angle ABC=2\angle ACB$

$\therefore \angle ABD=\dfrac{1}{2}\angle ABC=\angle ACB$



$\triangle ABD$ 與 $\triangle ABC$ 中

$\angle BAD = \angle BAC$

$\angle ABD = \angle ACB$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB$（AA 相似性質）

$\Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC} \Rightarrow \overline{AB}^2 = (\overline{AC} - \overline{CD}) \times \overline{AC}$ 。

$\because \angle BDC = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \angle ACB$

$\therefore \triangle BCD$ 為等腰三角形，故 $\overline{CD} = \overline{BD}$ 。

$\Rightarrow \overline{AB}^2 = (\overline{AC} - \overline{CD}) \times \overline{AC} \Rightarrow \overline{AB}^2 = (\overline{AC} - \overline{BD}) \times \overline{AC} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD} \times \overline{AC}$ 。

又 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{BC} \times \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ ， $\therefore \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC} \times \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \times \overline{AC}$ 。

故 $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB} \times \overline{BC}$ 。

【另解】

令 $\angle ACB = \theta$，則 $\angle ABC = 2\theta$，$\angle BAC = \pi - 3\theta$

由正弦定理知：$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A} = \dfrac{\overline{AC}}{\sin B} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$

$\therefore \dfrac{\overline{BC}}{\sin(\pi - 3\theta)} = \dfrac{\overline{AC}}{\sin 2\theta} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta} = 2R \Rightarrow \sin 3\theta\ \dfrac{\overline{BC}}{\sin 3\theta} = \dfrac{\overline{AC}}{\sin 2\theta} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta} = 2R = k$

$\Rightarrow \overline{BC} = k\sin 3\theta,\ \overline{AC} = k\sin 2\theta,\ \overline{AB} = k\sin\theta$

$$\overline{AC}^2 = k^2\sin^2 2\theta = k^2(2\sin\theta\cos\theta)^2 = 4k^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= 4k^2\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) = 4k^2\sin^2\theta - 4k^2\sin^4\theta$$

$$\overline{AB}^2 = k^2\sin^2\theta$$

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = k\sin\theta \times k\sin 3\theta = k^2 \times \sin\theta \times (3\sin\theta - 4\sin^3\theta) = 3k^2\sin^2\theta - 4k^2\sin^4\theta$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AB} \times \overline{BC} = k^2\sin^2\theta + 3k^2\sin^2\theta - 4k^2\sin^4\theta = 4k^2\sin^2\theta - 4k^2\sin^4\theta = \overline{AC}^2$$

故 $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB} \times \overline{BC}$

(2)過 A 點作 $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$ 交 $\overline{BC}$ 之延長線於 E 點

$\because \overline{BD} \parallel \overline{AE}$ $\therefore \angle AEC = \angle DBC = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \angle ACB$

$\therefore \triangle ACE$ 為等腰三角形， 故 $\overline{AE} = \overline{AC}$

又 $\angle AEB = \angle EAB = \dfrac{1}{2}\angle ABC$ $\therefore \triangle AEB$ 為等腰三角形， 故 $\overline{AB} = \overline{BE}$

$\triangle ACE$ 中， $\overline{AE} + \overline{AC} > \overline{CE}$ $\Rightarrow 2\overline{AC} > \overline{BC} + \overline{BE}$ $\Rightarrow 2\overline{AC} > \overline{AB} + \overline{BC}$。

---

4. 該數列可寫為： $1+10^4, 1+10^4+10^8, \cdots, 1+10^4+\cdots+10^{4n}, \cdots$，

其中 $n = 1, 2, 3, \cdots, k, \cdots$

所以，可以考慮一般化的數列：

$1+x^4, 1+x^4+x^8, \cdots, 1+x^4+\cdots+x^{4n}, \cdots$，其中 $x \in \mathbb{N},\ \ x \ge 2$

(1) 若 n 為奇數，設 $n = 2k+1,\ \ k \in \mathbb{N}$，則

$$\begin{aligned}1+x^4+x^8+\cdots+x^{4(n-1)}+x^{4n} &= 1+x^4+x^8+\cdots+x^{4(2k)}+x^{4(2k+1)}\\ &= \left(1+x^4\right)+x^8\left(1+x^4\right)+\cdots+x^{8k}\left(1+x^4\right)\\ &= \left(1+x^4\right)\left(1+x^8+\cdots+x^{8k}\right)\end{aligned}$$

因此，該數為合數。

當 $k=0,\ \ x=10$ 時，由於 $1+10^{4\cdot 1} = 10001 = 73 \times 137$，所以此數亦為合數。

(2) 若 n 為偶數，設 $n = 2k,\ \ k \in \mathbb{N}$，則

$$\begin{aligned}1+x^4+x^8+\cdots+x^{4(n-1)}+x^{4n} &= 1+x^4+x^8+\cdots+x^{4(2k-1)}+x^{4(2k)}\\ &= \frac{1-\left(x^4\right)^{2k+1}}{1-x^4} = \frac{1-\left(x^{2k+1}\right)^4}{1-x^4}\\ &= \frac{1-\left(x^{2k+1}\right)^2}{1-x^2}\cdot\frac{1+\left(x^{2k+1}\right)^2}{1+x^2}\\ &= \frac{1-\left(x^2\right)^{2k+1}}{1-x^2}\cdot\frac{1+\left(x^2\right)^{2k+1}}{1+x^2}\\ &= \left[1+x^2+\cdots+\left(x^2\right)^{2k}\right]\left[1-x^2+\cdots+\left(x^2\right)^{2k}\right]\end{aligned}$$

該數為合數。因此，綜合(1)(2)可證得這數列中沒有質數。

5. 負項中的分母為偶數，我們將每個$-\frac{1}{2k}$化為$\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}$

所以

$$\frac{p}{q}=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1359})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{679})$$

$$=\frac{1}{680}+\frac{1}{681}+\cdots+\frac{1}{1359}$$

因為$\frac{1}{680+j}+\frac{1}{1359-j}=\frac{1359+680}{(680+j)(1359-j)}$

對所有的 j 將上述分數配對相加，得到常數分子

$$\frac{p}{q}=(\frac{1}{680}+\frac{1}{1359})+(\frac{1}{681}+\frac{1}{1358})+\cdots+(\frac{1}{1019}+\frac{1}{1020})$$

$$=\frac{2039}{680\times1359}+\frac{2039}{681\times1358}+\cdots+\frac{2039}{1019\times1020}$$

$$=2039\times\frac{p'}{q'}$$

其中，q' 為從 680 到 1359 的所有整數之積，每個整數與 2039 互質（因為 2039 是個質數）

因為 $p\times q'=2039\times p'\times q$，且 2039 不能整除 q'，它須能整除 p

故 $p=2039m$，m 為整數

由二項式定理，可知$(p+1)^{2009}=pn+1$，n 為整數。

得到$(p+1)^{2009}=2039mn+1$

故$(p+1)^{2009}$除以 2039 的餘數是 1。