九十八學年度台灣省第四區(新竹高中)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試一參考解答）

【問題一解答】

（1）整數 a, b 滿足 $a^2 - b^2$ 為偶數，表示 a, b 有相同的奇偶性，因此，$a + b$ 與 $a - b$ 都是偶數，故 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 為 4 的倍數。

（2）利用反證法，假設 $\sqrt{f(1)}, \sqrt{f(2)}, \sqrt{f(3)}, \sqrt{f(4)}$ 四數都是有理數，那麼，$f(1), f(2), f(3), f(4)$ 都必須是正整數且為完全平方數(這是因為 $f(x)$ 是整係數多項式)。又對每一整數 k，

$$f(k+2) - f(k) = 6ak^2 + 12ak + 4bk + 8a + 4b + 2c$$

都是偶數，由(1)，$f(k+2) - f(k)$ 恆為 4 的倍數，其中 $k = 1, 2$。

（i）當 $k = 1$ 時，

$$0 \equiv f(3) - f(1) = 6a + 12a + 4b + 8a + 4b + 2c \equiv 2(a + c) \pmod 4$$

得 $a + c$ 是偶數。但 a 為奇數，故 c 必為奇數。

（ii）當 $k = 2$ 時，

$$0 \equiv f(4) - f(2) = 24a + 24a + 8b + 8a + 4b + 2c \equiv 2c \pmod 4，$$

得 c 必為偶數。

由於(i)與(ii)矛盾，故 $\sqrt{f(1)}, \sqrt{f(2)}, \sqrt{f(3)}, \sqrt{f(4)}$ 四數之中至少有一數不是有理數。

【問題二解答】

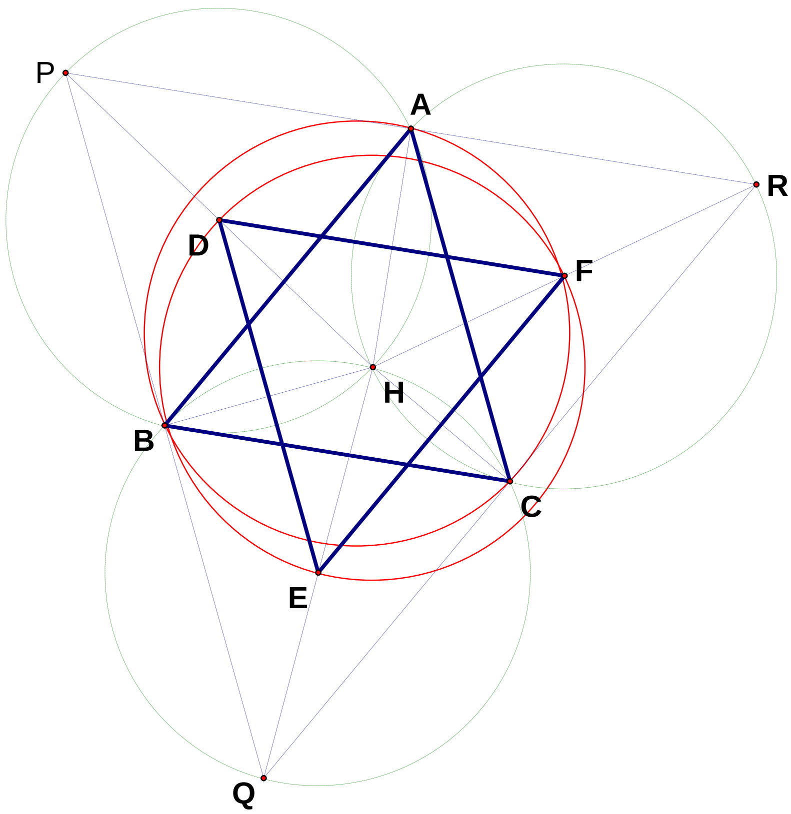
（1）連 $\overleftrightarrow{HD}$ 交 ΔABH 外接圓於 P 點，連 $\overleftrightarrow{HE}$ 交 ΔBCH 外接圓於 Q 點，連 $\overleftrightarrow{HF}$ 交 ΔCAH 外接圓於 R 點。因為 $\angle HCQ = \angle HCR = 90^\circ$，故 Q, C, R 三點共線。同理，R, A, P 三點共線，P, B, Q 三點共線。又

$$\angle HQC = \angle HBC = \angle HAC = \angle HRC，$$

於是，$\overline{HQ} = \overline{HR}$；同理可得 $\overline{HP} = \overline{HR}$。因此，$\frac{1}{2}\overline{HP} = \frac{1}{2}\overline{HQ} = \frac{1}{2}\overline{HR}$，

即 $\overline{HD} = \overline{HE} = \overline{HF}$，故 H 為 ΔDEF 的外心。

（2）由於 B 為 $\overline{PQ}$ 中點，C 為 $\overline{QR}$ 中點，得 $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{PR}$。再由 D 為 $\overline{HP}$ 中點，F 為 $\overline{HR}$ 中點，得 $\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{PR}$。因此，$\overline{BC} = \overline{DF}$；同理可得 $\overline{AB} = \overline{EF}$、$\overline{AC} = \overline{DE}$。故 $\Delta ABC \cong \Delta EFD$。



【問題三解答】

(1) 利用和角公式 $\sin y\cos x-\sin x\cos y=\sin(y-x)$，可得

$$\tan y-\tan x=\frac{\sin y}{\cos y}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin y\cos x-\sin x\cos y}{\cos x\cos y}$$

$$=\frac{\sin(y-x)}{\cos x\cos y}。$$

當 $-\frac{\pi}{2}<x<y<\frac{\pi}{2}$ 時，$\cos x>0,\cos y>0$，且 $\sin(y-x)>0$；於是可得：$\tan y-\tan x=\frac{\sin(y-x)}{\cos x\cos y}>0$。

(2) 對任意 7 個相異實數 $y_1<y_2<\cdots<y_7$，我們可以取出對應的 7 個實數 $x_1,x_2,\cdots,x_7\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $y_k=\tan x_k$。由(1)可知 $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\cdots<x_7<\frac{\pi}{2}$；於是，根據鴿籠原理，至少有接連的兩個數 x_i,x_{i+1} 滿足 $0<x_{i+1}-x_i<\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\right)=\frac{\pi}{6}$。因此，

$$0=\tan 0<\tan(x_{i+1}-x_i)<\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}。$$

又

$$\tan(x_{i+1}-x_i)=\frac{\tan x_{i+1}-\tan x_i}{1+\tan x_{i+1}\tan x_i}=\frac{y_{i+1}-y_i}{1+y_{i+1}y_i}，$$

於是可得 $0<\frac{3y_{i+1}-3y_i}{1+y_{i+1}y_i}<\sqrt{3}$。但以下 6 個實數中，任兩數不具有上述的性質：

$$\tan(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{12})、\tan(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6})、\tan(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{6})$$

$$\tan(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{6})、\tan(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{6})、\tan(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{6})$$

因此，所求最小的正整數 $n=7$。