九十八學年度台灣省第四區(新竹高中)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科口試解答）

（1）將 n 的所有正因數由小而大排成一列

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\cdots,\ a_k\ ,$$

其中 $a_1 = 1, a_k = n, k = S(n)$。則有 $a_1a_k = a_2a_{k-1} = \cdots = a_ka_1 = n$，

於是，

$$P(n)^2 = (a_1a_k)(a_2a_{k-1})\cdots(a_ka_1) = n^k = n^{S(n)}\ 。$$

因此，

$$P(n) = a_1a_2\cdots a_k = n^{\frac{S(n)}{2}}\ 。$$

（2）由 $1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3$，可得 $S(1500) = (2+1)(1+1)(3+1) = 24$；因此，

$$P(1500) = 1500^{12} = 2^{24} \times 3^{12} \times 5^{36}\ 。$$

（3）由 $P(n) = 2^{110} \times 3^{275}$，可設 $n = 2^a \times 3^b$，得

$$P(n) = n^{\frac{S(n)}{2}} = 2^{\frac{a(a+1)(b+1)}{2}} \times 3^{\frac{b(a+1)(b+1)}{2}}\ ,$$

故

$$\frac{a(a+1)(b+1)}{2} = 110\ ,\ \frac{b(a+1)(b+1)}{2} = 275\ 。$$

因此，$a : b = 110 : 275 = 2 : 5$。可令 $a = 2k, b = 5k$，代入上式，化簡得

$$k(2k+1)(5k+1) = 110\ 。$$

故得 $k = 2$，而 $a = 4, b = 10$。因此，所求的正整數 $n = 2^4 \times 3^{10}$。

註明：此正整數 n 的唯一性是因 $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 為一對一的函數。