九十八學年度台灣省第一區(花蓮高中)

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試一參考答案）

問題一： $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{51}-\frac{1}{52}$

$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{52})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{52})$

$=(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{52})-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{26})$

$=\frac{1}{27}+\frac{1}{28}+\ldots+\frac{1}{52}$

$=(\frac{1}{27}+\frac{1}{52})+(\frac{1}{28}+\frac{1}{51})+\ldots+(\frac{1}{39}+\frac{1}{40})$

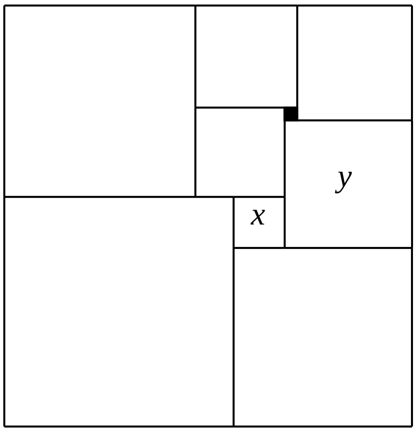
$=\frac{79}{27\times 52}+\frac{79}{28\times 51}+\ldots+\frac{79}{39\times 40}$

$=\frac{79k}{27\times 28\times\ldots\times 52}$

因 79 和 $27\times 28\times\ldots\times 52$ 互質

故 $79\,|\,q$

問題二： 利用正方形的邊長，可推得



(1) 觀察這九個正方形的邊長，得

左側寬 $=(2y-5)+(2x+y)=2x+3y-5$;

右側寬 $=(y-1)+y+(x+y)=x+3y-1$;

下邊長$=(2x+y)+(x+y)=3x+2y$;

上邊長$=(y-1)+(y-2)+(2y-5)=4y-8$;

利用「左側寬=右側寬」得$2x+3y-5=x+3y-1$，即$x=4$，再利用「下邊長=下邊長」得$3x+2y=4y-8$，即$2y=3x+8=20$。故$x=4, y=10$。

(2) 長方形的

長$=3x+2y=3\cdot 4+2\cdot 10=32$;

寬$=2x+3y-5=2\cdot 4+3\cdot 10-5=33$.

問題三：(1)由三角不等式知$a+b>c$

另一方面，由算幾不等式

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

$$\le a^2+b^2+a^2+b^2$$

$$=2(a^2+b^2)$$

$$=2c^2$$

因此$a+b\le\sqrt{2}c$

(2) $a+b=\sqrt{2}c \Leftrightarrow (a+b)^2=2c^2$

$$\Leftrightarrow 2ab=a^2+b^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

另解，也可利用柯西不等式：

$$(a^2+b^2)(1^2+1^2)\ge(a\cdot 1+b\cdot 1)^2$$

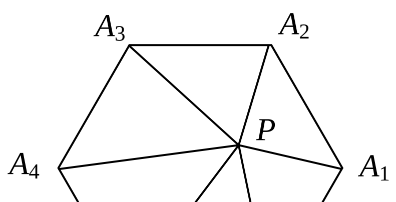
$$2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2$$

$$2c^2\ge(a+b)^2$$

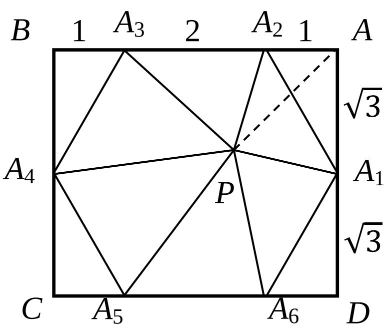
$$\sqrt{2}c\ge a+b$$

上式等號成立，即$\sqrt{2}c=a+b$，的充要條件是$a=b$

問題四：設此正六邊形的邊長為 2，並畫一個長方形$ABCD$將此正六邊形匡住，



如下圖所示：



若令 P 至 $\overline{AD}$ 的距離為 a，至 $\overline{BC}$ 的距離為 b；至 $\overline{AB}$ 的距離為 x，至 $\overline{CD}$ 的距離為 y，則

$$a+b=4,\ x+y=2\sqrt{3}.$$

三角形 PA_1A_2 的面積為

$$\begin{aligned}\triangle PA_1A_2 &= \square PA_1AA_2 - \triangle A_1AA_2\\ &= (\triangle PA_1A + \triangle PA_2A) - \triangle A_1AA_2\\ &= \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{x\cdot 1}{2}\right)-\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{x+a\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

利用同樣的方式，可以得到

$$\triangle PA_3A_4 = \frac{x+b\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2};$$

$$\triangle PA_5A_6 = y$$

因此

$$\triangle PA_1A_2 + \triangle PA_3A_4 + \triangle PA_5A_6 = (x+y)+\left(\frac{a+b}{2}-1\right)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

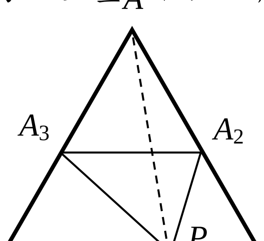
同理可得

$$\triangle PA_6A_1 + \triangle PA_2A_3 + \triangle PA_4A_5 = 3\sqrt{3}.$$

故三角形 PA_1A_2，PA_3A_4 與 PA_5A_6 的面積和與三角形 PA_6A_1，PA_2A_3 與 PA_4A_5 的面積和一樣。

另解：

設此正六邊形的邊長為 2，並畫一個大三角形 ABC 將此正六邊形匡住，



如下圖所示：

此時大正三角形 ABC 的邊長為 6，且其面積為$9\sqrt{3}$，此時，我們可以將面積和轉換如下

$$\begin{aligned}
&\triangle PA_1A_2 + \triangle PA_3A_4 + \triangle PA_5A_6 \\
&= \frac{\Delta PCA}{3} + \frac{\Delta PAB}{3} + \frac{\Delta PBC}{3} \\
&= \frac{\Delta ABC}{3} \\
&= 3\sqrt{3},
\end{aligned}$$

同理可得

$$\triangle PA_6A_1 + \triangle PA_2A_3 + \triangle PA_4A_5 = 3\sqrt{3},$$

故得證。