高雄市九十八學年度

高級中學數理及資訊學科能力競賽

（數學科筆試二參考解答）

［問題一］：

向量 $\overline{AB}=(5,3)$，令點 Q 的參數式為 $(-2+5t,1+3t);t\in[0,1]$

$\Rightarrow x^2-2y^2-1=(-2+5t)^2-2(1+3t)^2-1=7t^2-32t+1$

$=7\left(t-\frac{16}{7}\right)^2-\frac{249}{7}$.　　①

當 $t=\frac{16}{7}$ 時有最小值，但 $\frac{16}{7}\notin[0,1]$　　②

①、②$\Rightarrow$當 $t=1$ 時有最小值 $=7\left(1-\frac{16}{7}\right)^2-\frac{249}{7}=-24$

當 $t=0$ 時有最大值 $=7\left(0-\frac{16}{7}\right)^2-\frac{249}{7}=1$

［問題二］：

$P(x,y)=12x^2-84xy+172y^2+108x-298y+2009$

$=3\left(4x^2+49y^2+81-28xy+36x-126y\right)+\left(25y^2+80y+64\right)+1702$

$=3(2x-7y+9)^2+(5y+8)^2+1702\geq 1702$

故當 $\begin{cases}2x-7y+9=0\\5y+8=0\end{cases}$ 時有最小值 1702

亦即當 $x=\frac{-101}{10}$，$y=-\frac{8}{5}$ 時有最小值 1702

［問題三］：

過點$(8,6)$作一平行$\overleftrightarrow{OB}$直線$3x-10y+36=0$，

與 $8y=15x$交於點 $(\frac{16}{7},\frac{30}{7})$。

$\because$此點恰是線段$\overline{OA}$的中點，$\therefore$ A點坐標為$(\frac{32}{7},\frac{60}{7})$，

得A點與$(8,6)$之間長為$\frac{30}{7}$，故$\overline{AB}=\frac{60}{7}$。

［問題四］：

$\because$ $[\log_2 1]=0$，$[\log_2 2]=[\log_2 3]=1$，

$[\log_2 4]=[\log_2 5]=[\log_2 6]=[\log_2 7]=2$ ...⋯

且 $1+2+2^2+2^3+...+2^7=255$，

$\therefore$得 $1\times 0+2\times 1+4\times 2+2^3\times 3+...+2^7\times 7=1538$；

$\because$ $2009-1538=471$，$471\div 8=58$餘7

$\therefore$ $n\geq 255+59=314$ $\Rightarrow$ n最小取值314，使得不等式成立。

［問題五］：

$$\begin{cases} ab+5=c...(1) \\ bc+1=a...(2) \\ ca+1=b...(3) \end{cases}$$

把(1)代入(2),(3)式得：$\begin{cases} b(ab+5)+1=a...(4) \\ a(ab+5)+1=b...(5) \end{cases}$

$(5)-(4)$得$(a-b)(ab+6)=0$

即$a=b$或$ab=-6$

當$a=b$時,代入(4)得$a^3+4a+1=0$沒有整數解

當$ab=-6$時,代入(1)得$c=ab+5=-1$,再代入(2)得$a+b=1$

即$(a,b)=(-2,3)or(3,-2),c=-1$。