九十七學年度新竹區

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(一)【參考解答】

問題一： 已知五條線段中，任意三條均可成為三角形的三邊。試證其中必有三條線段組成的三角形為銳角三角形。

【解】

令此五條線段長分別為 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5，

不失一般性，可令 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$。

設此五條線段中任意三條組成的三角形均不是銳角三角形，則有

$a_3{}^2 \ge a_1{}^2 + a_2{}^2$，$a_4{}^2 \ge a_2{}^2 + a_3{}^2$，$a_5{}^2 \ge a_3{}^2 + a_4{}^2$。

由此得 $a_5{}^2 \ge a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 \ge 3a_1{}^2 + 2a_2{}^2$

由 $a_1{}^2 + a_2{}^2 \ge 2a_1a_2$，可得 $a_5{}^2 > a_1{}^2 + a_2{}^2 + 2a_1a_2$，亦即 $a_5{}^2 > (a_1 + a_2)^2$，進而得 $a_5 > a_1 + a_2$ 與 $a_5 < a_1 + a_2$ 矛盾。故其中必有三條線段組成銳角三角形。

問題二： 設 n 為正整數，a 為大於 1 之實數。試解不等式

$$\log_a x - 4\log_{a^2} x + 12\log_{a^3} x + \cdots + n(-2)^{n-1}\log_{a^n} x > \frac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2 - a)$$

【解】

利用換底公式，原不等式左端為

$$\log_a x - 4\frac{\log_a x}{\log_a a^2} + 12\frac{\log_a x}{\log_a a^3} + \quad \cdots \quad + n(-2)^{n-1}\frac{\log_a x}{\log_a a^n}$$

$$= \left[1 - 2 + 4 + \quad \cdots \quad + (-2)^{n-1}\right]\log_a x = \frac{1-(-2)^{n-1}}{3}\log_a x$$

所以原不等式等價於 $\dfrac{1-(-2)^{n-1}}{3}\log_a x > \dfrac{1-(-2)^{n-1}}{3}\log_a(x^2 - a)$ 。

(1) 若 n 為奇數，則 $\dfrac{1-(-2)^{n-1}}{3} > 0$。故有

$$\log_a x > \log_a(x^2-a) \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-a>0 \\ x>x^2-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>a \\ \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \end{cases}$$

Note that $\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0$, $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>\dfrac{\sqrt{4a}}{2}=\sqrt{a}$，

所以交集為 $\sqrt{a}<x<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ 。

(2) 若 n 為偶數，則 $\dfrac{1-(-2)^{n-1}}{3} < 0$。故有

$$\log_a x < \log_a(x^2-a) \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-a>0 \\ x<x^2-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\sqrt{a} \\ x < \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x>\sqrt{a} \\ x > \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \end{cases}$$

同樣地 $\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0$, $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>\dfrac{\sqrt{4a}}{2}=\sqrt{a}$，

所以交集為 $x>\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ 。

由上可知，答案為 $\begin{cases} \sqrt{a}<x<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, & \text{if } n \text{ is odd} \\ x>\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$ 。

問題三： $ABCD$ 為平面上的凸四邊形。現在以四個邊為邊長，分別向著四邊形的外部各作一個正方形，並設以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 為一邊所作出的正方形的中心分別為 P、Q、R、S 四點。試證：$\overleftrightarrow{PR}\perp\overleftrightarrow{QS}$ 且 $\overline{PR}=\overline{QS}$。

【解】

將圖形放在複數平面上，且不失一般性假設 $ABCD$ 為逆時針。

令向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$ 所代表的複數分別為 a,b,c,d，且知 $a+b+c+d=0$。

因為 $\overline{AP}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{AB}$，且 $\overline{AP}$ 的方向是 $\overline{AB}$ 順時針旋轉 45°，所以

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos45^\circ-i\sin45^\circ)\cdot a=\dfrac{1-i}{2}a$。同理可得

$\overrightarrow{AQ}=a+\dfrac{1-i}{2}b$ ，$\overrightarrow{AR}=a+b+\dfrac{1-i}{2}c$ ，$\overrightarrow{AS}=a+b+c+\dfrac{1-i}{2}d$ 。所以

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=a+b+\dfrac{1-i}{2}(c-a)=\dfrac{1+i}{2}a+b+\dfrac{1-i}{2}c$ ，而

$\overrightarrow{QS}=b+c+\dfrac{1-i}{2}(d-b)=b+c+\dfrac{1-i}{2}(-a-2b-c)=\dfrac{-1+i}{2}a+ib+\dfrac{1+i}{2}c$ 。

上下比較之後可以發現$\overrightarrow{QS}=i\overrightarrow{PR}$，所以線段$\overline{PR}$與線段$\overline{QS}$等長且互相垂直，得證。

註：以上的複數平面證明可以輕易改寫成平面向量的證明。