九十七學年度高雄市
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(二)【參考解答】

1. 【解】

先證明出：$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \ge \dfrac{a+b+c}{3}$

則題目左式$\ge \dfrac{a+b+c}{3}+\dfrac{b+c+d}{3}+\dfrac{c+d+a}{3}+\dfrac{d+a+b}{3}=a+b+c+d$

$$\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{a^3}\right)^2+\left(\sqrt{b^3}\right)^2+\left(\sqrt{c^3}\right)^2\right] \ge \left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\therefore (a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge \left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge (a+b+c)^2$$

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{a+b+c}{3}$$

成立$\Leftrightarrow$①②等號同時成立

$$\therefore \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^3}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b^3}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c^3}} \text{且} \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \quad \therefore a=b=c$$

可推得$a=b=c=d$時，原式等號成立

2. 【解】

因為等分點共 100 點，不失其一般性，此圓以 p_1及 p_{51}為圓周上直徑的兩端點。

因此上半圓有 49 點（ p_2， p_3，…， p_{50} ）

$$\overline{p_1p_2}^2+\overline{p_1p_{50}}^2=\overline{p_1p_2}^2+\overline{p_2p_{51}}^2=4$$

依此類推共可得到 24 配對，故長度為$24\times4+\overline{p_1p_{26}}^2=24\times4+2$

因此長度為$2\cdot[24\times4+2]+4=200$

3. 【解】

將此正方形分成四個邊長為 1 的正方形,則這四個邊正方形中至少一個會包含這 5 個點中至少兩個，則所包含的點的距離≤$\sqrt{2}$。

4. 【解】

(1) 因為 x,y 互質，所以 x 和 y 或全為奇數或一奇一偶。

如果 x 和 y 全為奇數，則 x^2 和 y^2 被 4 除都餘 1，所以 z^2 被 4 除餘 2，但這是不可能的。所以 x 和 y 是一奇一偶，得 z^2 是奇數，即 z 是奇數。

(2) 如果 x 和 y 都不是 3 的倍數，則 x^2 和 y^2 被 3 除都餘 1，所以 z^2 被 3 除餘 2，但這是不可能的。所以 x 和 y 之中有一個是 3 的倍數。

5.【解】

若 $\frac{1105}{2} \le n^2 \le 1105$

則 $n^2 =$ 576, 625, 676, 729, 841, 900, 961, 1024, 1089

可得 $1105 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2$

∴ 最小面積之三邊為 4, 9, 12

所求 $= \sqrt{\frac{25}{2}\left(\frac{25}{2}-4\right)\left(\frac{25}{2}-9\right)\left(\frac{25}{2}-12\right)} = \frac{5\sqrt{119}}{4}$ 。