九十七學年度高雄市

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(一)【參考解答】

問題一： 設 x, y, z 三數為實數且 $xyz \neq 0$。

試證： $\dfrac{x^2+y^2}{3x^2+3y^2+2z^2}+\dfrac{y^2+z^2}{3y^2+3z^2+2x^2}+\dfrac{x^2+z^2}{3x^2+3z^2+2y^2}\leq\dfrac{3}{4}$

【解】令 $a=x^2+y^2,\quad b=y^2+z^2,\quad c=x^2+z^2$

證明 $\dfrac{a}{b+c+2a}+\dfrac{b}{c+a+2b}+\dfrac{c}{a+b+2c}\leq\dfrac{3}{4}$

$$\frac{(b+c+2a)+(c+a+2b)+(a+b+2c)}{3}\geq((b+c+2a)(c+a+2b)(a+b+2c))^{1/3}$$

$$\frac{(b+c+2a)^{-1}+(c+a+2b)^{-1}+(a+b+2c)^{-1}}{3}\geq((b+c+2a)(c+a+2b)(a+b+2c))^{-1/3}$$

所以 $\dfrac{4(a+b+c)[(b+c+2a)^{-1}+(c+a+2b)^{-1}+(a+b+2c)^{-1}]}{9}\geq 1$

故 $\dfrac{a}{b+c+2a}+\dfrac{b}{c+a+2b}+\dfrac{c}{a+b+2c}\leq\dfrac{3}{4}$

問題二： 令 $T=T(a,b,c)$ 表三邊為 $\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$ 及 $\overline{AB}=c$ 的 ΔABC，且滿足 $0<a\leq b\leq c$ 及 $a+b>c$。定義 $T=T(a,b,c)$ 的倒數為 $T^{-1}=T\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}\right)$，若 T^{-1} 本身是一個三角形，則稱 T 為可逆。

證明： 若 T 為可逆， 則 $a>\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)c$。

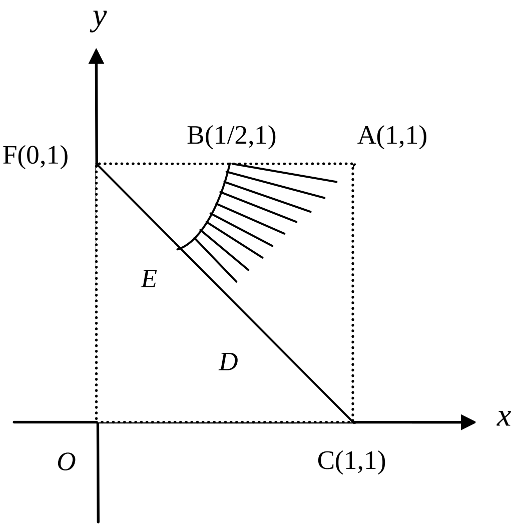
【解】在 $T=T(a,b,c)$ 中，$0<a\leq b\leq c$， 且 $a+b>c$。

若 $T^{-1}=T\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}\right)$ 亦為一個三角形， 則 $0<\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{1}{a}$ 且 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$

由上可得 $\begin{cases}a+b>c\\ \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}>1\\ \dfrac{c}{b}+1>\dfrac{c}{a}\end{cases}$

令 $x=\dfrac{a}{c}$， $y=\dfrac{b}{c}$ $\Rightarrow \begin{cases} 0<x\le y\le 1 \quad \because\ 0<a\le b\le c \\ x+y>1 \\ \dfrac{1}{y}+1>\dfrac{1}{x} \end{cases}$

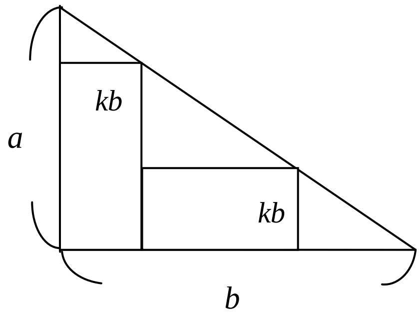
所形成之區域如下圖所示（不含曲線 BE 與線段 ED）：



圖中 E： $\begin{cases} x+y=1 \\ \dfrac{1}{y}+1=\dfrac{1}{x} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x^2-3x+1=0,$ $\therefore$ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ （取－）

故若 T 為可逆 $\Rightarrow$ $x>\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},$ $\therefore$ $\dfrac{a}{c}>\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow$ $a>\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)c$ 。

問題三：如右圖，兩個全等之矩形置於一直角三角形內，並使其一長邊各與三角形之一股重合，設兩股長 a, b 可調整，又設矩形短邊長為 kb，則 k 之最大值為何？



【解】 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DE}}=\dfrac{a}{b}$ ， $\overline{AD}=ka\Rightarrow\overline{CD}=(1-k)a$

$\Rightarrow\overline{EF}=(1-k)a-kb,\quad \overline{FG}=\overline{CD}=(1-k)a$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{EF}}{\overline{FG}}=\dfrac{(1-k)a-kb}{(1-k)a}=\dfrac{a}{b}$

設 $\dfrac{a}{b}=x$， 則 $\dfrac{(1-k)x-k}{(1-k)x}=x$

$\Rightarrow (1-k)x^2-(1-k)x+k=0$

$\because\ x=\dfrac{a}{b}\in\Re$

$\therefore\ (1-k)^2-4k(1-k)\geq 0\ \Rightarrow k\leq\dfrac{1}{5}$ 或 $k\geq 1$ (不合)

而 $k=\dfrac{1}{5}$ 時， $x=\dfrac{1}{2}>0$ (合)， 所以 k 最大值 $\dfrac{1}{5}$。

問題四：設 n 是奇數且 k 為大於 1 的正整數。

證明： (1) n^2 被 8 除餘 1； (2) n^{2^k} 被 2^{k+1} 除餘 1。

【解】(1) 可設 $n=4m+1$ 或 $n=4m+3$。

如果 $n=4m+1$，$(4m+1)^2=16m^2+8m+1=8(2m^2+m)+1$；

如果 $n=4m+3$，$(4m+3)^2=16m^2+24m+9=8(2m^2+3m+1)+1$。

所以 n^2 被 8 除餘 1。

(2) 利用數學歸納法證明。

(a) $k=2$，(1) 已證明。

(b) 假設 $k\geq 2$ 時，n^{2^k} 被 2^{k+1} 除餘 1，則可設 $n^{2^k}=l\times 2^{k+1}+1$。

因此 $$\begin{aligned} n^{2^{k+1}} &= (n^{2^k})^2=(l\times 2^{k+1}+1)^2=l^2\times 2^{2(k+1)}+2l\times 2^{k+1}+1 \\ &= 2^{k+2}(l^2\times 2^k+l)+1 \end{aligned}$$ ，

即 $n^{2^{k+1}}$ 被 2^{k+2} 除餘 1。

因此由數學歸納法得知(2)是成立的。

問題五：從 1 至 20 的數中任意選出 6 個數，此 6 個數中沒有包含連續整數，則此種選法共有多少種？

【解】可將 1 至 20 的數看成一個 20 位的二元數，選出的數以 1 填入，其他的以 0 填入，如此每一個選法對應一個有 6 個 1 的 20 位的二元數，這種數可看成 14 個零的當中放入 6 個 1，共 C(15,6)個，即有 C(15,6)個選法。