九十七學年度嘉義區

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(二)【參考解答】

一、【解】

令 S 為此 10 個字母所有可能排列所形成的集合，而 A_1 表示字母 A 連續，A_2 表示字母 I 連續，因此題意即為求 $\left|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right|$。

因為此 10 個有重複的字母，因此可視為不盡相異物的情形，則 $|S| = \dfrac{10!}{2!2!}$。 而 A_1 表示字母 A 連續，故可將所有字母 A 放在一起，並且視為一個體，再與剩下來的 8 個字母一起排列，所以 $A_1 = \dfrac{9!}{2!}$。同理，$A_2 = \dfrac{9!}{2!}$。

而 $A_1 \cap A_2$ 表示兩類字母 A 與 I 分別連續，因此亦將此兩類字母視為兩個體，再與剩下的 6 個字母一起排列，所以其排列數為 $|A_1A_2| = 8!$。

由排容原理

$$\left|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right| = |S| - \left[|A_1| + |A_2|\right] + |A_1A_2|$$

$$= \frac{10!}{2!2!} - \left(\frac{9!}{2!} + \frac{9!}{2!}\right) + 8! = 584640$$

二、【解】

令 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ 因此 $a_n = S_{n-1}$.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

$$a_{n+1} = 2a_n = 2^2 a_{n-1} = 2^n a_1 = 5 \cdot 2^n$$

$$a_1 = 5,\ \ a_n = 5 \cdot 2^{n-2},\ \ n \ge 2$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 2^2}+\cdots$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

三、【解】

設 a_n 表示在 n 次投擲中不連續出現兩次正面的機率，明顯地，$a_1=1,\ a_2=\frac{3}{4}$，

若 $n>2$，有兩種情形：

如果第一次為反面，則其餘的 $n-1$ 次投擲中不連續出現兩次正面的機率為 a_{n-1}，而如果第一次為正面，即第二次必為反面，所以之後的 $n-2$ 次投擲中不連續出現兩次正面的機率為 a_{n-2}，因此

$$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{4}a_{n-2},\quad n>2$$

將此遞迴關係式兩邊同乘 2^n，即可得到

$$2^n a_n=2^{n-1}a_{n-1}+2^{n-2}a_{n-2}$$

對於每個 n，設 $b_n=2^n a_n$，則得

$$b_n=b_{n-1}+b_{n-2}$$

此即為費伯那西數列的遞迴關係式。因此，

$$p_n=1-a_n=1-\frac{F_{n+2}}{2^n}=1-\frac{(1+\sqrt{5})^{n+2}-(1-\sqrt{5})^{n+2}}{2^{2n+2}\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ p_6=1-\frac{(1+\sqrt{5})^8-(1-\sqrt{5})^8}{2^{14}\sqrt{5}}=\frac{21}{64}.$$

四、【解】

設 $c(x,y,z)$，於是

$$\overrightarrow{O\ A}\ \overrightarrow{O = B}\quad \overrightarrow{O\ B}\ \overrightarrow{\ominus\ C}\quad 且\quad \left|\overrightarrow{OC}\right|=1$$

即 $\frac{3}{5}=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=,$ 且 $x^2+y^2+z^2=1$

解得 $x=\frac{3}{5},\ \ y=\frac{3}{10},\ z=\frac{\sqrt{5}}{10}.$

五、【解】

考慮二項式定理

$$\sum_{k=0}^{2007}\binom{2007}{k}x^k=(1+x)^{2007} \qquad (4)$$

將 $x=i$ 代入(4)，右式為

$$\begin{aligned}(1+i)^{2007}&=\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{2007}\\&=2^{2007/2}\cos\left(\frac{2007\pi}{4}\right)+i2^{2007/2}\sin\left(\frac{2007\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

利用生二項式展開，左式為

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2007}\binom{2007}{k}i^k&=\left[\binom{2007}{0}-\binom{2007}{2}+\binom{2007}{4}-\binom{2007}{6}+\cdots\right]\\&\quad+i\left[\binom{2007}{1}-\binom{2007}{3}+\binom{2007}{5}-\binom{2007}{7}+\cdots\right]\end{aligned}$$

所以 $\binom{2007}{1}-\binom{2007}{3}+\binom{2007}{5}-\binom{2007}{7}+\cdots=2^{2007/2}\sin\left(\frac{2007\pi}{4}\right)=-2^{1003}$