九十七學年度嘉義區

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(一)【參考解答】

問題一：設三角形 ABC 的外接圓和內切圓的面積分別為 M 和 m，證明 $M \ge 4m$。

【解】設 ΔABC 的內切圓和外接圓半徑分別為 r, R，

並設 ΔABC 的面積為 Δ，而 $S=\dfrac{a+b+c}{2}$.

由 $\quad sr=\Delta \quad$ 和 $\quad \Delta=\dfrac{abc}{4R}$

得 $\quad r=\dfrac{\Delta}{s} \quad$ 和 $\quad R=\dfrac{abc}{4\Delta}$

所以
$$\frac{R}{r}=\left(\frac{abc}{4\Delta}\right)\left(\frac{s}{\Delta}\right)$$
$$=\frac{abcs}{4\Delta^2}$$
$$=\frac{abcs}{4s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\frac{abc}{4s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

若設 $\quad x=s-a,\ y=s-b,\ z=s-c,$

則 $\quad a=y+z,\ b=x+z,\ c=x+y.$

因此

$$a=y+z\ge 2\sqrt{yz}$$
$$b=x+z\ge 2\sqrt{xz}$$
$$c=x+y\ge 2\sqrt{xy}$$

所以 $\quad abc\ge 8xyz$

故知 $\quad \dfrac{abc}{4s(s-a)(s-b)(s-c)}=\dfrac{abc}{4xyz}\ge 2$

進而得 $\quad \dfrac{R}{r}\ge 2,$

由此得 $\quad \dfrac{M}{m}=\left(\dfrac{R}{r}\right)^2\ge 4.$

問題二： 找出所有正整數 n，$120 \le n \le 130$，使得 n 無法表示成 $a+b+ab$ 的形式，其中 a, b 為正整數。

【解】

等式 $n=a+b+ab$ 等價於 $n+1=(a+1)(b+1)$

即 $n+1$ 不為質數。

因此 n 無法表成 $a+b+ab$ 等價於 $n+1$ 為質數。

在 121 和 131 中的質數是 127 和 131。

故 $n=126$ 和 130 無法表成 $a+b+ab$ 的形式。

問題三： 在邊長為 1 的正三角形 ABC 的邊 AB, AC 上分別取 D, E 兩點，使得沿線段 DE 摺三角形時，頂點 A 正好落在邊 BC 上。求符合上述條件時線段 AD 之長的最小值。

【解】

因為 A 關於 DE 的對稱點 P 在 BC 上，所以若設 $\angle BAP=\theta$，則 $\angle DPA=\theta$，$\angle BDP=2\theta$，再設 $AB=a,\ AD=x$，於是在 ΔABP 中

$$\frac{BP}{\sin\angle BAP}=\frac{AB}{\sin\angle APB}$$

$$BP=\frac{\sin\theta}{\sin(120^\circ-\theta)}$$

於 ΔPBD 中 $\dfrac{DP}{\sin\angle B}=\dfrac{BP}{\sin\angle BDP}$

因 $DP=DA=x$，$BP=\dfrac{x\sin 2\theta}{\sin 60^\circ}$

$$x=\frac{\sin\theta\sin 60^\circ}{\sin 2\theta\sin(120^\circ-\theta)}=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\cdot 2\sin\theta\cos\theta\sin(60^\circ+\theta)}=\frac{\sqrt{3}}{4\cos\theta\sin(60^\circ+\theta)}$$

$$4\cos\theta\sin(60^\circ+\theta)=2\sin(60^\circ+2\theta)+2\sin 60^\circ=2\sin(60^\circ+2\theta)+\sqrt{3}$$

因 $0\le\theta\le 60^\circ$，$60^\circ\le 60^\circ+2\theta\le 180^\circ$

$0\le\sin(60^\circ+2\theta)\le 1$ (1)

$$\sqrt{3}\le 4\cos\theta\sin(60^\circ+\theta)\le 2+\sqrt{3}$$

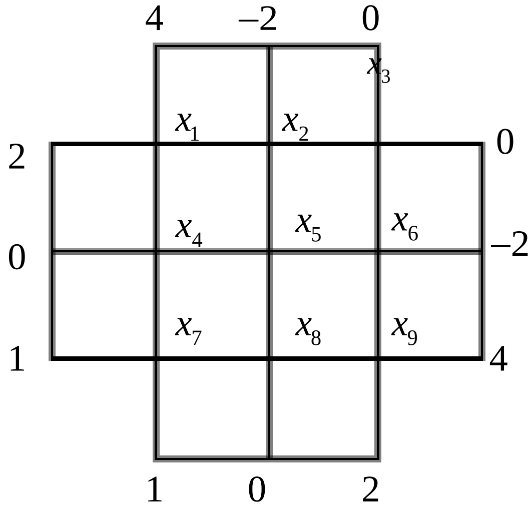
$$\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \qquad (2\sqrt{3}-3)\le x\le 1$$

其中 $(2\sqrt{3}-3)=x$ 只有(1)式右邊取等號，即 $60^\circ+2\theta=90^\circ$

$\theta=15^\circ$ 時才成立。因此 AD 在 $\theta=15^\circ$ 取得最小值 $(2\sqrt{3}-3)$

此時 $AD=(2\sqrt{3}-1)$.

問題四： 如右圖所示，在一個缺角棋盤的各水平線和鉛垂線的交會點上，分別標示數字，其中的 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 等為未知數字。今假設每一個 x_i 恰為其相鄰的四個數字的平均數，試求出 x_5。



【解】

由題設知

$$x_1=\frac{1}{4}(4+2+x_2+x_4)$$

$$x_3=\frac{1}{4}(0+0+x_2+x_6)$$

$$x_7=\frac{1}{4}(1+1+x_4+x_8)$$

$$x_9=\frac{1}{4}(2+4+x_6+x_8)$$

因此

$$x_1+x_3+x_7+x_9=\frac{1}{4}\left[14+2(x_2+x_4+x_6+x_8)\right]$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}(x_2+x_4+x_6+x_8) \qquad ①$$

類似的，可得

$$x_2+x_4+x_6+x_8=\frac{1}{4}\left[-2+0-2+0+4x_5+2(x_1+x_3+x_7+x_9)\right] \qquad ②$$

$$=-1+x_5+\frac{1}{2}(x_1+x_3+x_7+x_9)$$

又 $$x_5=\frac{1}{4}(x_2+x_4+x_6+x_8) \qquad ③$$

所以將①, ③代入②得

$$x_2+x_4+x_6+x_8=-1+\frac{1}{4}(x_2+x_4+x_6+x_8)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{7}{2}+\frac{1}{2}(x_2+x_4+x_6+x_8)\right\}$$

再代回③得 $x_5=\dfrac{3}{8}$.