九十七學年度高屏區

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(二)【參考解答】

問題一：試求方程式 $\log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x = 2$ 之實數解。

【解】:

因為 $\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 x}{2}$ 所以 $\log_2 \log_4 x = \log_2 \log_2 x - 1$

且 $\log_4 \log_2 x = \dfrac{\log_2 \log_2 x}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 \log_2 x}{2}$

令 $y = \log_2 \log_2 x$ 則 $y - 1 + \dfrac{y}{2} = 2$ 所以 $y = 2$, 因此 $x = 16$。

問題二：已知 $x+y=z=0$ 且 $x^2+y^2+z^2=2$, 試求 $x^4+y^4+z^4$ 的值.

【解】:

因為 $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)=4$

所以 $x^4+y^4+z^4 = 4-2(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)$

又 $(xy+yz+xz)^2 = x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2xyz(x+y+z) = x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$

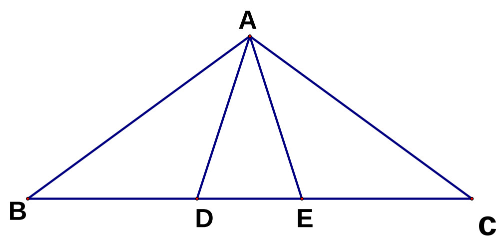
且 $0=(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)$

因此 $xy+yz+xz=-1$, 所以 $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2=1$

所以 $x^4+y^4+z^4 = 4-2=2$

問題三：ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$, 且 $\angle A = 108°$,

試求 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 之比值。



【解】 令 $\overline{AB}=\overline{AC}=a, \overline{BC}=b$, 在 $\overline{BC}$ 上取二點 D, E, 使得

$$\angle BAD = 36°, \angle CAE = 36°, \therefore \angle DAE = 36°. \therefore \overline{CD}=\overline{AC}=a, \overline{BD}=b-a,$$

又 $\Delta ADB \sim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \dfrac{b-a}{a} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{b}{a} - 1 = \dfrac{a}{b}$

令 $x = \dfrac{b}{a} \Rightarrow x - 1 = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\therefore \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

問題四：設方程式$(m-2)\cdot x^2+(m^2-4m+3)\cdot x-(6m^2-2)=0$有實根，且此二根的立方和為 0，試求 m 值。

【解】：

設$a,b\in\mathbb{R}$為方程式的二根，

則$a^3+b^3=0 \Leftrightarrow a^3=-b^3=(-b)^3 \Leftrightarrow a=-b$ 或$a+b=0$

若$m=2$，則$-x-22=0$（不合）

若$m\neq 2$，則

$$x^2+\frac{m^2-4m+3}{m-2}\cdot x-\frac{6m^2-2}{m-2}=0$$

$$\Rightarrow -\frac{m^2-4m+3}{m-2}=0$$ （二根之和為零）

$\Rightarrow (m-1)(m-3)=0$

$\Rightarrow m=1$ 或 3

若$m=1$，則方程式為$-x^2-4=0$（無實根，不合）

若$m=3$，則方程式為$x^2-52=0$，$x=\pm\sqrt{52}$

所以$m=3$。

問題五：在直角三角形ΔABC中，$\angle C=90°$, 且其三個角 A、B、C 之對應邊長分別為 a、b、c，試求$\cos(2A-B)$。

【解】：$C=\pi/2 \Rightarrow \cos(2A-B)=\cos\left[2\left(\pi/2-B\right)-B\right]=\cos[\pi-3B]$

$$=-\cos 3B = 3\cos B-4\cos^3 B=\frac{3a}{c}-\frac{4a^3}{c^3}=\frac{3ac^2-4a^3}{c^3}$$

$$=\frac{a\left(3c^2-4a^2\right)}{c^3}$$