九十七學年度高屏區

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(一)【參考解答】

問題一：已知三角形 ABC 之三邊長分別為 a,b,c，且其外接圓半徑為 R，若 $R=\dfrac{a\sqrt{bc}}{b+c}$，

試求 ΔABC 的三內角之度數。

【解】$\because b+c\geq 2\sqrt{bc}\Rightarrow \dfrac{\sqrt{bc}}{b+c}\leq\dfrac{1}{2}$. 由題意知，$\dfrac{R}{a}=\dfrac{\sqrt{bc}}{b+c}\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow a\geq 2R.$

但 $a\leq 2R\Rightarrow a=2R.$

$\therefore \dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}=1\Rightarrow b+c=\sqrt{bc}\Rightarrow(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2=0\Rightarrow b=c.$ 由正弦定理知

$$\sin A=1\Rightarrow\angle A=90^\circ$$

故 $\angle B=\angle C=45^\circ$.

問題二：試證：對任意的正整數 n，$\left(3+\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^n$ 必為整數且是偶數。

【解】令 $f(n)=\alpha^n+\beta^n$，其中 $\alpha=3+\sqrt{5}$ 且 $\beta=3-\sqrt{5}$。

我們直接檢驗 $f(1)=6$ 和 $f(2)=28$ 均為偶數。

假設對某正整數 k，$f(k)$ 和 $f(k+1)$ 都是偶數。

考慮 $n=k$ 的情形，

注意 α 和 β 都是方程式 $x^2-6x+4=0$ 的根。

所以 $\alpha^2=6\alpha-4$ 及 $\beta^2=6\beta-4$，如此

$$\begin{aligned}f(k+2)&=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}=\alpha^k(6\alpha-4)+\beta^k(6\beta-4)\\&=6(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-4(\alpha^k+\beta^k)=6f(k+1)-4f(k)\end{aligned}$$

則 $f(k+2)$ 必定也是一個偶數。

由數學歸納法，我們推斷對所有的自然數 n，$f(n)$ 都是偶數。

問題三：　試求方程組$\begin{cases} ab+c+d=3 \\ bc+d+a=5 \\ cd+a+b=2 \\ da+b+c=6 \end{cases}$ 的實數解a,b,c,d。

【解】

$$\begin{cases} ab+c+d=3 & (1) \\ bc+d+a=5 & (2) \\ cd+a+b=2 & (3) \\ da+b+c=6 & (4) \end{cases}$$

由上面四式中部分式子互減，可得

$$(2)-(3):\ (b-d)(c-1)=3 \qquad (5)$$

$$(4)-(1):\ (d-b)(a-1)=3 \qquad (6)$$

$$(5)-(6):\ (b-d)(c+a-2)=0 \qquad (7)$$

由(7)中發現$b=d$ 或 $c+a=2$，

但若$b=d$，則(5)不會成立，故$c+a=2$。

$$(1)+(2):\ (a+c)b+a+c+2d=8$$

$$2b+2d=6 \quad (\because c+a=2)$$

$$b+d=3$$

因此由上可知$a+b+c+d=5$，

比較(1)和(2)中，可得$ab+2=a+b$ 和 $bc=b+c$，則

$$(5)+(6):\quad (b-d)(c-a)=6 \qquad (8)$$

$$(4)-(3):\quad (d-1)(a-c)=4$$

$$(2)-(1):\quad (b-1)(c-a)=2$$

$$\text{即}(2-2b)(a-c)=4 \qquad (9)$$

由上可知 $2-2b=d-1$ 且又知$b+d=3$，可得 $b=0$ 及 $d=3$

代入(8)中，得$a-c=2$ 且又知$a+c=2$，可得$c=0$ 及 $a=2$

問題四：已知α為複數，且滿足$|\alpha|=1$，試問當z是怎樣的複數時，$\dfrac{\alpha+z}{1+\alpha z}$才會是實數？

【解】：令$w=\dfrac{\alpha+z}{1+\alpha z}\in R$，且$z\neq-\dfrac{1}{\alpha}$

$$|\alpha|=1\Rightarrow|\alpha|^2=\alpha\bar{\alpha}=1\Rightarrow-\frac{1}{\alpha}=-\bar{\alpha}\Rightarrow z\neq-\bar{\alpha}$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha+z}{1+\alpha z}=\frac{\bar{\alpha}+\bar{z}}{1+\bar{\alpha}\bar{z}}\Rightarrow\alpha+z+\alpha\bar{\alpha}\bar{z}+\bar{\alpha}z\bar{z}=\bar{\alpha}+\bar{z}+\alpha\bar{\alpha}z+\alpha z\bar{z}$$

$$\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2=1\text{，}z\bar{z}=|z|^2\Rightarrow\alpha+z+\bar{z}+\bar{\alpha}|z|^2=\bar{\alpha}+z+\bar{z}+\alpha|z|^2$$

$$\Rightarrow(\alpha-\bar{\alpha})\left(1-|z|^2\right)=0\qquad\therefore\alpha=\bar{\alpha}\ \text{或}\ |z|=1.$$

（a）當$\alpha=\bar{\alpha}$時，$\alpha=1$或-1；

故（i）在$\alpha=1$時，z是不等於-1之任意複數

（ii）在$\alpha=-1$時，z是不等於1之任意複數。

（b）當$\alpha\neq\bar{\alpha}$時，$1-|z|^2=0\Rightarrow1=|z|$，也就是說$z$是在單位圓上非$-\bar{\alpha}$之所有點。

問題五：已知a,b,c皆為正數，試證：$\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}\geq a+b+c.$

【解】利用算幾不等式，因為

$$\frac{a^3}{b^2}+b+b\geq3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2}\cdot b\cdot b}=3a,\ \frac{b^3}{c^2}+c+c\geq3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c^2}\cdot c\cdot c}=3b,\ \frac{c^3}{a^2}+a+a\geq3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a^2}\cdot a\cdot a}=3c,$$

將上述三式相加得$\left(\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}\right)+2(a+b+c)\geq3(a+b+c)$，故得證。