台灣省第一區九十六學年度

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(一)【參考解答】

問題一：

【解】直接計算

$a_1=0$，$a_2=\frac{1}{18}$，$a_3=\frac{1}{12}$，$a_4=\frac{9}{100}$，$a_5=\frac{4}{45}$，$a_6=\frac{25}{294}$得知

$a_1=0<a_2=\frac{1}{18}<a_3=\frac{1}{12}<a_4=\frac{9}{100}$，

$a_4=\frac{9}{100}>a_5=\frac{4}{45}>a_6=\frac{25}{294}$

$$a_{k-1}-a_k=\frac{k^2(k+1)^2-4(k-1)(k+1)^2-k(k-1)(k+1)^2+4(k-1)k^2}{(k-1)k^2(k+1)^2}$$

$$=\frac{k(k+1)^2-4(k-1)(2k+1)}{(k-1)k^2(k+1)^2}$$

$$=\frac{k^3-6k^2+5k+4}{(k-1)k^2(k+1)^2}$$

知a_k在$k\geq 5$時是遞減的，因此$a_4=\frac{9}{100}$是最大項。

問題二：

【解】

$$9\cos^2 x+6(a+1)\sin x+8a^2\geq 2a+10$$

$$9\sin^2 x-6(a+1)\sin x\geq 8a^2-2a-1$$

$$(3\sin x-(a+1))^2\leq 9a^2$$

（1）當$a\geq -1$，則當$\sin x=-1$時，$y=(3\sin x-(a+1))^2$有最大值$(a+4)^2$

因此，$(a+4)^2\leq 9a^2$，則$a\geq 2$。

（2）當$a\leq -1$，則當$\sin x=1$時，$y=(3\sin x-(a+1))^2$有最大值$(a-2)^2$

因此，$(a-2)^2\leq 9a^2$，則$a\leq -1$。

綜合（1）、（2），$a\geq 2$或$a\leq -1$。

問題三：

【解】 設有 2 個正整數$0<x_1<x_0<p^n$都滿足$2p^n|x_0{}^2+a$，$2p^n|x_1{}^2+a$

則　$2p^n|x_0{}^2-x_1{}^2=(x_0+x_1)(x_0-x_1)$

且　$0<x_0+x_1<2p^n$

$0<x_0-x_1<p^n$

若　$p|x_0+x_1$　且　$p|x_0-x_1$　，則　$p|2x_0$　$\therefore p|x_0$　因而$p|a$矛盾

因此$p^n|x_0+x_1$　，$2|x_0-x_1$　，則$x_0+x_1=p^n$且x_0和x_1同奇偶，則p^n是偶數，矛盾。