九十六學年度高級中學數學科能力競賽試題（一）

南區（高屏區）【參考解答】

一、【參考解答】

$$
\begin{aligned}
& a_n \\
&= 1+[1+2+3+4+\cdots+(n-1)] \\
&= 1+\frac{n\cdot(n-1)}{2}
\end{aligned}
$$

當 $\begin{cases} n=4k-3\ (k=1,2,3,\cdots,m) \\ n=4k\ (k=1,2,3,\cdots,m) \end{cases}$ 時，a_n 為奇數

求 $\sum_{k=1}^{m} a_{4k-3}+\sum_{k=1}^{m} a_{4k}$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{m} a_{4k-3}+\sum_{k=1}^{m} a_{k4} \\
&= \sum_{k=1}^{m}(a_{4k-3}+a_{4k}) \\
&= \sum_{k=1}^{m}\{[1+\frac{(4k-3)(4k-4)}{2}]+[1+\frac{4k(4k-1)}{2}]\} \\
&= \sum_{k=1}^{m}(16k^2-16k+8) \\
&= 16\sum_{k=1}^{m}k^2-16\sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=1}^{m}8 \\
&= 16\cdot\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}-16\cdot\frac{m(m+1)}{2}+8m \\
&= \frac{16m^3+8m}{3}
\end{aligned}
$$

要求前 600 項中的奇數，故 $m=150$，代入得和為 18000400.

二、【參考解答】

設 n 為一正整數，$n=a_1+a_2+\ldots+a_k$，滿足條件(a)共有 n 種。

因 $k a_1 \leqq a_1+a_2+\ldots+a_k=n \leqq a_1+(k-1)(a_1+1)=k a_1+k-1$，

$a_1 \leqq n/k \leqq a_1+(k-1)/k < a_1+1$。

$a_1=\text{floor}(n/k)$

因此，共有 n 種不同的加法表示法。

因此，將 2101 表成正數的和滿足條件(a)共有 2101 種不同的表示法。

將 2101 表成正數的和滿足條件(b)，我們只要考慮將 2100 表成正數的和滿足條件(b)，同時去掉 k 個數都相同的，如 2100 = 700 + 700 +700，再將 a_k 加 1 即可。2100 $=2^2\times3\times5^2\times7$ 共有 (1+2)(1+1)(1+2)(1+1) = 36 個因數，因此，2101 表成正數的和

滿足條件(b) 共有 $2100-36=2064$ 種不同的表示法。

因此，全部共有 $2101+2064=4165$ 種不同的表示法。

三、【參考解答】

令 $w \neq 1$ 且 $w^3=1$，則 $w^2+w=-1$。

因為 $Q(r_j+\frac{1}{r_j})=0, j=1,\ldots,1017$，所以 $Q(x)=k\prod_{j=1}^{1017}(x-(r_j+\frac{1}{r_j}))$。

因此

$$\frac{Q(1)}{Q(-1)}=\prod_{j=1}^{1017}\frac{r_j^2-r_j+1}{r_j^2+r_j+1}=\prod_{j=1}^{1017}\frac{(-w-r_j)(-w^2-r_j)}{(w-r_j)(w^2-r_j)}=\frac{P(-w)P(-w^2)}{P(w)P(w^2)}$$

$$=\frac{(13w^2)(13w)}{(2+13w^2)(2+13w)}=\frac{169}{147}$$

四、【參考解答】

$$2^{2007}=8\left(65-1\right)^{334}$$

$$=8\left(65^{334}+C_1^{334}(-1)65^{333}+C_2^{334}(-1)^2 65^{332}+\ldots\ldots+C_{333}^{334}(-1)^{333}65+1\right)$$

$$=8\left[65^{334}+C_1^{334}(-1)65^{333}+C_2^{334}(-1)^2 65^{332}+\ldots\ldots+C_{333}^{334}(-1)^{333}65\right]+8$$

故 2^{2007} 除以 13 之餘數＝8。