教育部九十五學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）【參考解答】

一、【解】

令 $a_n=$ 第 n 分鐘時，螞蟻回到頂點 A 的機率，那麼第 n 分鐘時，螞蟻不在頂點 A 的機率即為 $(1-a_n)$。

如果螞蟻在第(n-1)分鐘時不在 A 點，那麼有 1/3 的機率，它會在一分鐘之後(也就是在第 n 分鐘時)回到 A 點，所以 $a_n=(1/3)(1-a_{n-1})$。

（從另一方面來說，第 n 分鐘時，螞蟻不在頂點 A 的情形可能有兩種：其一，在第(n-1)分鐘時它已經到達 A 點，所以下一分鐘(也就是在第 n 分鐘時)它勢必要離開 A 點。其二，在第(n-1)分鐘時它不在 A 點，然後有 2/3 的機率，在下一分鐘它也不會到達 A 點，所以 $1-a_n=a_{n-1}+(2/3)(1-a_{n-1})$，同樣可以得到 $a_n=(1/3)(1-a_{n-1})$。）

由 $a_0=1$ 得到 $a_n=\frac{1}{4}[1+\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}]$。將 $n=60$ 代入上式，得到機率 $\frac{1}{4}[1+\frac{1}{3^{59}}]$。

這個值非常接近(但不等於) 一般人所猜測的 1/4。

二、【解】

$x\neq\pm1,\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

設 $x=\tan A$，則本有理式可變為

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\mathrm{t\ a}\ A\mathrm{n}+2\quad A\mathrm{t}}{1=\ \mathrm{t\ a}\ A\mathrm{n}\ \ 2\ \ A\mathrm{t}}$$

也就是 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 5A$

$\therefore\quad 5A=30^\circ+360^\circ k$

$$A=\frac{\pi(\ 1+\ \ k\ 2}{30},\ \ k=0,1,2,3,4.$$

三、【證明】

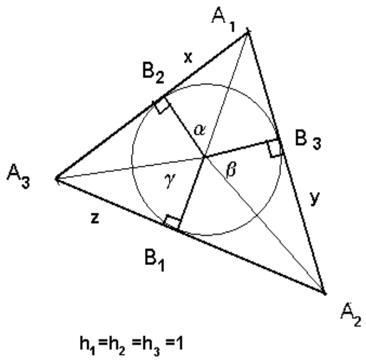
由 Cauchy-Schwartz 不等式：

$$\left(\frac{\ell_1}{h_1}+\frac{\ell_2}{h_2}+\frac{\ell_3}{h_3}\right)(h_1\ell_1+h_2\ell_2+h_3\ell_3)\ge(\ell_1+\ell_2+\ell_3)^2$$

設 a 為三角形 $A_1A_2A_3$ 之面積

ℓ 為其周長；$\ell=\ell_1+\ell_2+\ell_3$，則

$2a=\ell_1 h_1+\ell_2 h_2+\ell_3 h_3$



$$\therefore \quad \frac{\ell_1}{h_1}+\frac{\ell_2}{h_2}+\frac{\ell_3}{h_3}\ge\frac{\ell^2}{2a}$$

等式成立之條件為

$$\frac{\sqrt{\frac{\ell_1}{h_1}}}{\sqrt{h_1\ell_1}}=\frac{\sqrt{\frac{\ell_2}{h_2}}}{\sqrt{h_2\ell_2}}=\frac{\sqrt{\frac{\ell_3}{h_3}}}{\sqrt{h_3\ell_3}}$$

$\therefore \quad h_1=h_2=h_3$，也就是，當 P 為內心時最小。

設 $r=h_1=h_2=h_3$ 為內切圓半徑。我們有

$$\frac{\ell}{r}=\frac{\ell^2}{2a}$$

注意這個數量是"dimensionless"，也就是，假設二個相似三角形周長與面積分別為 $(\ell_1,a_1),(\ell_2,a_2)$，則 $\dfrac{\ell_1^2}{2a_1}=\dfrac{\ell_2^2}{2a_2}$。因此，這個量只與三角形的形態有關，而與大小無關。所以，為了決定其最小值，我們可以固定 $r=1$，找出內切圓半徑為 1 的三角形中，周長 ℓ 為最小者。

假設三角形 $A_1A_2A_3$ 之內接圓圓心為 P，半徑為 1。P 至 S_1,S_2,S_3 的垂足分別為 B_1,B_2,B_3，設 $\alpha=\angle A_1PB_2$, $\beta=\angle A_2PB_3$, $\gamma=\angle A_3PB_1$, 則 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$。令 $x=\tan\alpha, y=\tan\beta, z=\tan\gamma$, 則 $x+y+z=\dfrac{\ell}{2}$，而且由 $\tan\theta$ 之和角公式得

$$x+\ y+\ z=\ ,\ (x,y,z>0)$$

設 $x+y+z=\lambda$ 由算幾不等式，

$$\lambda\le\left(\frac{\lambda}{3}\right)^3$$

因而 $\lambda\ge3\sqrt{3}$。當 $x=y=z$ 時，等式成立，所以 ℓ 之最小值為 $2\times3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$，而 $A_1A_2A_3$ 為正三角形。

四、【證明】

注意到在 $\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(1+x)^{p+j}$ 中的 x^p 之係數是 $\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}$,而

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(1+x)^{p+j}=\left(\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(1+x)^{j}\right)(1+x)^{p}$$

$$=[(1+x)+1]^{p}(1+x)^{p}$$

$$=(2+x)^{p}(1+x)^{p}$$

所以 $\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{p}{p-k}2^{k}$

但 $p\left|\binom{p}{k}\right.(k=1,2,\cdots,p-1)$，因此

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}\equiv\binom{p}{0}\binom{p}{p}2^{0}+\binom{p}{p}\binom{p}{0}2^{p}=1+2^{p}\pmod{p^{2}}$$