臺北市九十五學年度

高級中學數學及自然學科能力競賽

數學科筆試（一）【參考解答】

問題一【解】

(1)當 $n=2$ 時，$f(x)=x^2+a_0$。因為 $f(1)=0$，所以，$a_0=-1$，此時多項式

$f(x)=x^2-1=(x-1)(x-a_0)$。這表示：當 $n=2$ 時，本題的多項式只有 x^2-1。

(2)當 $n=3$ 時，$f(x)=x^3+a_2x^2+a_0$。因為 $f(1)=0$，所以，$1+a_2+a_0=0$。因為

$f(x)=(x-1)(x-a_2)(x-a_0)$，所以，$1\times a_2\times a_0=-a_0$。兩式合併，得

$$a_2(-1-a_2)=1+a_2，\quad 或 \quad (1+a_2)^2=0。$$

由此得 $a_2=-1$，$a_0=0$，$f(x)=x^3-x^2$。此時 $x-a_2$ 不是方程式 $f(x)$ 的因式。

這表示當 $n=3$ 時沒有本題的多項式。

(3)當 $n=4$ 時，$f(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_0$。由 $f(1)=0$ 得 $1+a_3+a_2+a_0=0$。因為

$f(x)=(x-1)(x-a_3)(x-a_2)(x-a_0)$，所以，$1\times a_3\times a_2\times a_0=a_0$。

(i) 若 $a_0\neq 0$，則得 $a_2a_3=1$。因為 a_2 與 a_3 都是整數，所以，可得 $a_2=a_3=1$ 或 $a_2=a_3=-1$。

於是，$f(x)=x^4+x^3+x^2+a_0$ 或 $f(x)=x^4-x^3-x^2+a_0$。當

$f(x)=x^4+x^3+x^2+a_0$ 時，由 $f(1)=0$ 得 $a_0=-3$，但 $f(x)=x^4+x^3+x^2-3$ 顯然不滿足

$f(-3)=0$。當 $f(x)=x^4-x^3-x^2+a_0$ 時，由 $f(1)=0$ 得 $a_0=1$，但 $f(x)=x^4-x^3-x^2+1$

顯然不滿足 $f(-1)=0$。因此，$a_0\neq 0$ 的情形無解。

(ii) 若 $a_0=0$，則得 $a_2=-1-a_3$，$f(x)=x^4+a_3x^3+(-1-a_3)x^2$。因為 $f(x)$ 可分解成

$f(x)=x^2(x-1)(x+1+a_3)$，而依題意，$f(x)=x(x-1)(x-a_3)(x+1+a_3)$，

可知 $a_3=0$，$a_2=-1$。於是，$f(x)=x^2(x^2-1)=(x-1)(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)$。這表示

$x^2(x^2-1)$ 是本題所求的整數係數多項式的一例。

綜合以上結果可知：當 $n=4$ 時，本題的多項式只有 $x^2(x^2-1)$。 ||

問題二【解】

解 1：將兩端平方，得

$$x^2+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{35^2}{12^2}\text{ ，}$$

$$\frac{x^4}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{35^2}{12^2}=0\text{ ，}$$

$$\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{25}{12}\right)\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{49}{12}\right)=0\text{ ，}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{25}{12}\quad\text{或}\quad\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=-\frac{49}{12}\ \ (\text{不合})\text{ 。}$$

由$12x^2=25\sqrt{x^2-1}$可得

$$12(\sqrt{x^2-1})^2-25\sqrt{x^2-1}+12=0\text{ ，}$$

$$(3\sqrt{x^2-1}-4)(4\sqrt{x^2-1}-3)=0\text{ ，}$$

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{4}{3}\quad\text{或}\quad\sqrt{x^2-1}=\frac{3}{4}\text{ ，}$$

$$x^2=\frac{25}{9}\quad\text{或}\quad x^2=\frac{25}{16}\text{ ，}$$

$$x=\frac{5}{3}\ \text{或}\ x=\frac{5}{4}\text{ 。（因為 }x>0\text{）}$$

代入原方程式檢驗，兩數皆為根。

解 2：將原方程式去分母、移項、平方去分母，即得$12x=(35-12x)\sqrt{x^2-1}$。將兩端平方，得

$$144x^2=(144x^2-840x+1225)(x^2-1)\text{ ，}$$

$$144x^4-840x^3+937x^2+840x-1225=0\text{ 。}$$

由試除法可知$5/3$與$5/4$為上述方程式的的兩根，根據因式定理將上式左端因式分解，得

$$(12x^2-35x+25)(12x^2-35x-49)=0\text{ ，}$$

$$x=\frac{5}{3}\ \text{或}\ x=\frac{5}{4}\ \text{或}\ x=\frac{35+7\sqrt{73}}{24}\ \text{或}\ x=\frac{35-7\sqrt{73}}{24}\text{ 。}$$

因為$x>0$，所以，$(35-7\sqrt{73})/24$不是原方程式的根。代入原方程式檢驗，$5/3$與$5/4$皆為原方程式的兩根。

當$x=(35\pm7\sqrt{73})/24$時，得

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1225++3577-576\pm 490\sqrt{73}}{576}}=\sqrt{\frac{4226\pm 490\sqrt{73}}{576}}=\frac{49\pm 5\sqrt{73}}{24} ,$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35\pm 7\sqrt{73}}{49\pm 5\sqrt{73}}=\frac{-35\pm 7\sqrt{73}}{24} ,$$

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35\pm 7\sqrt{73}}{24}+\frac{-35\pm 7\sqrt{73}}{24}=\frac{\pm 7\sqrt{73}}{12} 。$$

由此可知：$(35+\sqrt{73})/24$ 與 $(35-7\sqrt{73})/24$ 都不是原方程式的根。

解 3 由原方程式可知：此方程式的實根必大於 1。

若 $x>1$，則必有唯一的 θ 滿足 $0<\theta<\pi/2$ 及 $x=\sec\theta$。將 $x=\sec\theta$ 代入原方程式，因為 $0<\theta<\pi/2$，所以，$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\tan^2\theta}=\tan\theta$。於是，可得

$$\sec\theta+\frac{\sec\theta}{\tan\theta}=\frac{35}{12} ,$$

$$\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}=\frac{35}{12} ,$$

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{35}{12} 。$$

將兩端平方，得

$$\frac{1+2(\sin\theta\cos\theta)}{(\sin\theta\cos\theta)^2}=\frac{1225}{144} ,$$

$$1225(\sin\theta\cos\theta)^2-288(\sin\theta\cos\theta)-144=0 ,$$

$$(25\sin\theta\cos\theta-12)(49\sin\theta\cos\theta+12)=0 ,$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25} \text{ 或 } \sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{49} 。$$

因為 $\sin\theta>0$ 且 $\cos\theta>0$，所以，$\sin\theta\cos\theta>0$。於是，得

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25} 。$$

進一步得

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{25} ,$$

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25} 。$$

於是，得

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}\text{ ，}$$

$$\sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{1}{5}\text{ 。}$$

進一步解得

$$\cos\theta=\frac{3}{5}\text{ 或 }\cos\theta=\frac{4}{5}\text{ ；}$$

$$\sec\theta=\frac{5}{3}\text{ 或 }\sec\theta=\frac{5}{4}\text{ 。}$$

由此可知：原方程式的解為5/3與5/4 。 ||

問題三【證】

首先注意到：不論 n 是任何正整數，恆有：當 $a\geq b$ 時，可得 $a^n\geq b^n$ ；當 $a\leq b$ 時，可得 $a^n\leq b^n$ 。

由前段性質可知：不論 m 與 n 是任何正整數， a^m-b^m 與 a^n-b^n 必滿足下述三種情況之一：兩數同為正數 (當 $a>b$ 時)，或兩數同為負數 (當 $a<b$ 時)，或兩數同為 0 (當 $a=b$ 時)。於是， $(a^m-b^m)(a^n-b^n)\geq 0$ 恆成立。乘開即得

$$a^{m+n}-a^mb^n-a^nb^m+b^{m+n}\geq 0\text{ ，}$$

$$a^{m+n}+b^{m+n}\geq a^mb^n+a^nb^m\text{ ，}$$

$$2(a^{m+n}+b^{m+n})\geq a^{m+n}+a^mb^n+a^nb^m+b^{m+n}\text{ ，}$$

$$2(a^{m+n}+b^{m+n})\geq (a^m+b^m)(a^n+b^n)\text{ ，}$$

$$\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}\geq\frac{a^m+b^m}{2}\times\frac{a^n+b^n}{2}\text{ 。}$$

根據前段的結果，可得

$$\frac{a^2+b^2}{2}\times\frac{a^3+b^3}{2}\leq\frac{a^5+b^5}{2}\text{ 。}$$

同理，可得

$$\frac{a^4+b^4}{2}\times\frac{a^5+b^5}{2}\leq\frac{a^9+b^9}{2}\text{ 。}$$

綜合前兩段的結果，即得

$$\frac{a^2+b^2}{2}\times\frac{a^3+b^3}{2}\times\frac{a^4+b^4}{2}\le\frac{a^5+b^5}{2}\times\frac{a^4+b^4}{2}\le\frac{a^9+b^9}{2}\text{ 。 ||}$$

問題四【證】令點 X 與點 Y 分別表示點 A 對直線 BM 與直線 CM 的對稱點，則點 X 在直線 BP 上且點 Y 在直線 CP 上。

因為$\triangle XBM$ 與$\triangle ABM$ 對直線 BM 對稱，且$\triangle YCM$ 與$\triangle ACM$ 對直線 CM 對稱，所以，可得

$$\overline{XB}=\overline{AB}\text{ ， }\overline{XM}=\overline{AM}\text{ ， }\angle BXM=\angle BAM=90^\circ\text{ ；}$$

$$\overline{YC}=\overline{AC}\text{ ， }\overline{YM}=\overline{AM}\text{ ， }\angle CYM=\angle CAM=90^\circ\text{ 。}$$

在$\triangle PXM$ 與$\triangle PYM$ 中，因為

$$\overline{XM}=\overline{YM}\text{ ， }\overline{PM}=\overline{PM}\text{ ， }\angle PXM=\angle PYM=90^\circ\text{ ，}$$

所以，$\triangle PXM$ 與$\triangle PYM$ 全等。由此得$\overline{PX}=\overline{PY}$ 。

於是，可得

$$\overline{PB}+\overline{PC}=(\overline{XB}-\overline{XP})+(\overline{YC}+\overline{YP})=\overline{XB}+\overline{YC}=\overline{AB}+\overline{AC}\text{ 。}$$

這就是欲證的結果。 ||