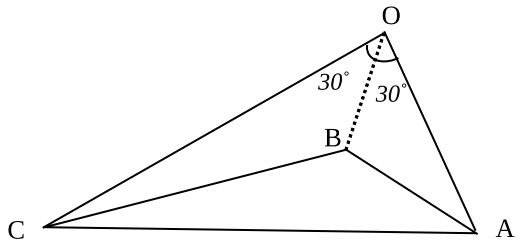
94 學年度高級中學數學科能力競賽複賽

台南區高級中學數學能力競賽試題(一)

1. 如圖,設 O, A, B, C 為平面上的四點,$\angle AOC = 60^0$,B 點在 $\angle AOC$ 的平分線上,已知 $\overline{OA} = 4$,$\overline{OB} = 2$,$\overline{OC} = 6$



求 (1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ =?

(2) 若 P 為滿足 $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$ 之點,其中 $\alpha \geq 0$,$\beta \geq 0$,$\gamma \geq 0$,$\alpha + \beta + \gamma = 1$,則所有 P 點所成之集合面積為何? **(10%)**

2. n 為正整數,$(n^2 + 3n + 2,\ 2n + 6)$ 表示 $n^2 + 3n + 2$ 和 $2n + 6$ 的最大公因數。證明對於所有的正整數 n,$(n^2 + 3n + 2,\ 2n + 6)$ 必為 2 或 4。 **(10%)**

3. 將 2101 表成正整數的和,即 $2101 = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$,(其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 為正整數且 $k \in \mathbb{N}$),同時滿足下列 (a) 或 (b) 兩條件中的任意一條件:

(a) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq a_1 + 1$, $k \geq 1$.

(b) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{k-1} \leq a_k \leq a_1 + 2$, $k \geq 2$.

試求 2101 表成上述正整數的和共有多少種不同的表示法。 **(10%)**

(註: 5 = 2+3 = 1+1+3 = 1+2+2 = 1+1+1+2 = 1+1+1+1+1 共有 6 種不同的表示法。)

4. 已知平面上一點 T 到一等邊 ΔABC 各頂點距離分別是 3 公分、5 公分及 7 公分,試求此等邊三角形面積。 **(10%)**

5. 設橢圓 $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$ 的兩焦點分別為 F 、 F' 。 P 點為橢圓上異於頂點的任意一點,且令 $\angle PFF' = \alpha$,$\angle PF'F = \beta$。 求 $\tan\dfrac{\alpha}{2} \cdot \tan\dfrac{\beta}{2}$ 之值。 **(9 %)**