台灣省第四區九十五學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)試題【參考解答】

問題一【解】：

若此四數有某一數為 0，則其餘三數必為 3，但此不合。故可令此四數之積 $p = wxyz \neq 0$ 。代回此四式可知 w 、 x 、 y 、 z 皆為 $t + \dfrac{2p}{t} = 3 \Rightarrow t^2 - 3t + 2p = 0$ 之根。分下列三種情況討論：

(1) 四數皆相同。則有 $w + 2w^3 = 3$ 。因式分解得到 $(w-1)(2w^2+2w+3) = 0$ ，而 $2w^2+2w+3=0$ 沒有實根，故此三次方程式只有一實根 $w=1$ 。

(2) 四數中有三數相同（設為 a ），另一數不同（設為 b ）。代回原方程組得 $a + 2a^2b = 3$ ， $b + 2a^3 = 3$ 。兩式相加得 $(a+b) + 2a^2(a+b) = 6$ 。既然 a,b 為 $t^2 - 3t + 2p = 0$ 之兩相異根，必有 $a+b=3$ ，而得到 $3 + 6a^2 = 6$ ，所以 $(a,b) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 3 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 3 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 。（各 4 組解，共 8 組）

(3) 四數中兩兩相同，設為 c,d ，且 $c > d$ 。一樣代回原方程組得 $c + 2cd^2 = 3$ ， $d + 2c^2d = 3$ 。兩式相加得到 $(c+d) + 2cd(c+d) = 6$ 。同(2)可知 $c+d=3$ ，故 $cd = \dfrac{1}{2}$ 。故解得

$$(c,d) = \left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}, \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)$$ 。（共 6 組解）

綜合(1)(2)(3)之討論，此方程組共有 $1+8+6=15$ 組實數解如上述。

問題二【解】：

以下用符號 $f^{[n]}$ 表示函數 f 合成 n 次，亦即 $f^{[n]} = \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n}$ 。

(1) 如果 $\overline{AP_1} = x$ ，利用 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的直角三角形的邊長比例關係，可得 $\overline{BQ_1} = \dfrac{1-x}{2}$ 。

由產生這些點列的遞迴關係，可令 $f(x) = \dfrac{1-x}{2}$ ，且當 $\overline{AP_1} = x$ 時，

$\overline{AP_2}=f^{[3]}(x)=\dfrac{3}{8}-\dfrac{x}{8}$ 。

(2) 可由數學歸納法證明：$\overline{P_nP_{n+1}}=\left|f^{[n-1]}(x)-f^{[n]}(x)\right|=\left|\dfrac{3}{8^n}-\dfrac{9x}{8^n}\right|$。如果 $x=\dfrac{1}{3}$ ，則 $P_1=P_2=\cdots=P_n=\cdots$ 對所有自然數 n 恆成立，此時所求級數和為 0。否則 P_n 與 P_{n+1} 點必出現在 $\overline{AB}$ 邊上和 A 點距離 $\dfrac{1}{3}$ 之點的兩側。故所求級數和為

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3-9x}{8^n}\right|=\left|\frac{3-9x}{8}\cdot\frac{8}{9}\right|=\left|\frac{1}{3}-x\right|$$

問題三【解】:

因為 x、y 均為正整數，所以 z 必不被 2、3 整除。現對方程式取模 3，得 $2^x\equiv z^2\equiv 1 \pmod 3$ ，故 $x=2a$ 為偶數。所以方程式可以被分解成

$$3^y=(z+2^a)(z-2^a)$$

由質因數分解的唯一性，可令 $z+2^a=3^m$ ， $z-2^a=3^n$ ，其中 m 、 n 為非負整數。故 $2\cdot 2^a=3^m-3^n$。既然此式的左邊不是 3 的倍數，n 必為 1，即 $2^{a+1}=3^m-1$ 。因為 $a+1\geq 2$ ，所以 3^m-1 為 4 的倍數，由此知 m 是偶數。再將平方差分解一次得

$$2^{a+1}=(3^{m/2}+1)(3^{m/2}-1)$$

所以存在兩個非負整數 j 、 k ，使得 $3^{m/2}+1=2^j$ ， $3^{m/2}-1=2^k$ 。兩式相減得 $2=2^j-2^k$ ，所以 $j=2$，$k=1$，而 $x=2a=2(j+k-1)=4$ 。又從 $3^m-1=2^{a+1}=8$，得 $m=2$，所以 $z=5$ ， $y=2$ 。故 $(x,y,z)=(4,2,5)$ 為此方程式的唯一正整數解。