台灣省第一區九十五學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)【參考解答】

問題一【解】:

$$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}\Rightarrow 10ac+bc=10ab+ac\Rightarrow b=\frac{9ac}{10a-c}\in N$$

$$a=1\Rightarrow b=\frac{9c}{10-c}\in N\Rightarrow c=4,5\Rightarrow\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{16}{64},\frac{19}{95}$$

$$a=2\Rightarrow b=\frac{18c}{20-c}\in N\Rightarrow c=5,8\Rightarrow\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{26}{65}$$

$$a=4\Rightarrow b=\frac{36c}{40-c}\in N\Rightarrow c=8\Rightarrow\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{49}{98}$$

問題二【解】:

通過 A 點的直線方程式為 $(y - 8) = m(x - 1)$, 即

$$y-mx+m-8=0$$

因

$$\frac{|m-8|}{\sqrt{1+m^2}}=4\Rightarrow m^2-16m+64=16+16m^2$$

$$\Rightarrow 15m^2+16m-48=0$$

$$\Rightarrow (3m-4)(5m+12)=0\Rightarrow m=\frac{4}{3},-\frac{12}{5}$$

得知 $\overline{AB}$ 在直線 $4x-3y+20=0$ 上，$\overline{AC}$ 在直線 $12x + 5y = 52$ 上，

令 $y = -4$ 分別代入上述方程式

可得 B 點坐標為（-8，-4），C 點坐標為$(6，-4)$

利用

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow(1+8,c+4)\cdot(6-1,-4-8)=0$

$\Rightarrow 45-12c-48=0$

$\Rightarrow c=-\frac{1}{4}$

可得垂心 H 點坐標為（1，$-\frac{1}{4}$）。

問題三【解】:

將 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 得

$$g(x)=(x+1)f(x)+(-x+3).$$

將 x 以 α,β,γ 代入，得 $g(\alpha)=3-\alpha$，$g(\beta)=3-\beta$，$g(\gamma)=3-\gamma$.

又由根與係數的關係，得

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-2; \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3; \\ \alpha\beta\gamma=1. \end{cases}$$

(1) 利用上述公式，得

$$\begin{aligned} g(\alpha)g(\beta)g(\gamma) &= (3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma) \\ &= 27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma \\ &= 27-9(-2)+3(-3)-1 \\ &= 35. \end{aligned}$$

(2) 利用上述公式，得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{g(\beta)g(\gamma)+g(\gamma)g(\alpha)+g(\alpha)g(\beta)}{g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)} \\ &= \frac{(3-\beta)(3-\gamma)+(3-\gamma)(3-\alpha)+(3-\alpha)(3-\beta)}{35} \\ &= \frac{27-6(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{35} \\ &= \frac{27-6(-2)+(-3)}{35} \\ &= \frac{36}{35}. \end{aligned}$$

問題四【解】:

底下證明

$$c+h>a+b.$$

利用畢氏定理 $c^2=a^2+b^2$ 及三角形面積 $=\dfrac{ch}{2}=\dfrac{ab}{2}$，得

$$\begin{aligned} (c+h)^2 &= c^2+2ch+h^2 \\ &= (a^2+b^2)+2ab+h^2 \\ &> a^2+2ab+b^2 \\ &= (a+b)^2. \end{aligned}$$

故 $c+h$ 恆大於 $a+b$。