95 學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高雄區）　筆試(二)試題（參考解答）

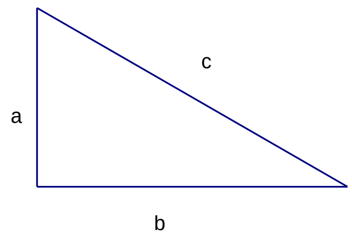
注意：請在答案卷上作答，須列過程及說明理由
　　　作答時間一小時

1. 【解】設直角三角形的兩股為 a、b，斜邊為 c

由 $a^2+b^2=c^2=4^2$ ……①

，可知 c=4

又 $a+b+c=4+\sqrt{26}$



，可得 $a+b=\sqrt{26}$ ….. ②

②^2-①　$2ab=10$

$ab=5$

三角形面積= $\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}ab=\frac{5}{2}$

可得　$h=\frac{5}{4}$

2.【解】

$\because 3|N$，

$\therefore N$ 的數字和可被 3 整除，

$\Rightarrow M$ 的數字和亦可被 3 整除，

$\Rightarrow$　$3|M$，

因此 $9|N$

$\Rightarrow N$ 的數字和可被 9 整除，

$\Rightarrow M$ 的數字和亦可被 9 整除，

$\Rightarrow$　$9|M$，(因此 $27|N$)

$\because$ 四位數中 9 的倍數最小為 1008，

$1008\cdot 3=3024,\ 1017\cdot 3=3051,\ 1026\cdot 3=3078,\ 1035\cdot 3=3105$

所以，$N=3105,\ M=1035$。

3. 【解】

(1)
$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$
$$=\frac{(n\text{-}1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

(2) 利用數學歸納法證明。

(a) r=0, $\binom{n}{0}=1=\binom{n+1}{0}$，

(b) 假設 $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}+\cdots+\binom{n+r-1}{r-1}=\binom{n+r}{r-1}$，則

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}+\cdots+\binom{n+r}{r}$$
$$=\left(\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}+\cdots+\binom{n+r-1}{r-1}\right)+\binom{n+r}{r}$$
$$=\binom{n+r}{r-1}+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}$$

4.【解】

令 $\overline{BC}=a,\overline{AC}=b,\overline{AB}=c,\therefore \overline{BP}=\dfrac{2a}{3},\overline{PC}=\dfrac{a}{3}.$

由正弦定理知，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\sqrt{\dfrac{3}{2}},\therefore \dfrac{\overline{BP}}{c}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a}{c}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{c}{a},$

$\therefore \Delta BPA\sim\Delta BAC,$

故 $\angle APB=\angle BAC=60°.$

5. 【解】

$\because 2^4+2^7=144=12^2$

$\therefore$設 $144+2^n=m^2$，m 為正整數。

$\Rightarrow\ 2^n=m^2-144=(m-12)(m+12)$

$\Rightarrow$ 存在非負整數 p,q，$p+q=n$ 且 $p>q$，使得

$m+12=2^p$

$m-12=2^q$

二式相減得：$2^q(2^{p-q}-1)=2^3\cdot 3$，

$\because 2^{p-q}-1$為奇數且 2^q 為 2 的次方，

$\therefore q=3$ 且 $p-q=2$

$\Rightarrow\ p=5$ 且 $q=3$

$\Rightarrow\ n=p+q=8$

代入原式得完全平方數。

6.【解】

(接下頁)

$$A^2=\left(\frac{xy}{z}\right)^2+\left(\frac{yz}{x}\right)^2+\left(\frac{zx}{y}\right)^2+2\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$=\left(\frac{xy}{z}\right)^2+\left(\frac{yz}{x}\right)^2+\left(\frac{zx}{y}\right)^2+2\cdot 25$$

$$\geq\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}+\frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y}+\frac{zx}{y}\cdot\frac{yz}{x}+2\cdot 25$$

$$=\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\cdot 25$$

$$=25+2\cdot 25=75$$

因此$A^2\geq 3\cdot 25$，又$A>0$

$\therefore A\geq 5\sqrt{3}$

等號成立的條件為$\frac{xy}{z}=\frac{yz}{x}=\frac{zx}{y}\Leftrightarrow x=y=z$

$\because x^2+y^2+z^2=25$

$\therefore x=y=z=5\frac{\sqrt{3}}{3}$

所以，當$x=y=z=5\frac{\sqrt{3}}{3}$，A 有最小值$5\sqrt{3}$。