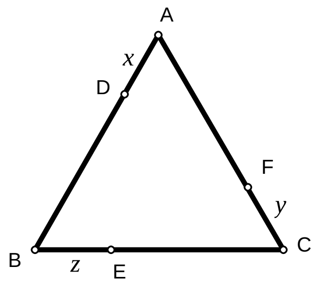
95 學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高雄區）　筆試(一)試題【參考解答】

注意：請在答案卷上作答，須詳列過程及說明理由；
作答時間二小時

1.【解】

轉化成作圖題，即作一正三角形 ABC, 其邊長為 1；



分別在三邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 及 $\overline{CA}$ 上各取一點 D,E,F, 使得 $\overline{AD}=x.\overline{BE}=z,\overline{CF}=y$（如圖所示）。

因此 ΔABC 的面積必大於 $\Delta ADF,\Delta BDE,\Delta CEF$ 三個面積之和，即

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 60^\circ > \frac{1}{2}\cdot x\cdot (1-y)\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot y\cdot (1-z)\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot z\cdot (1-x)\sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$$

2. 【解】

由題目的對稱性，設 $a\le b\le c$，

$\because (b-\frac{1}{a})(c-\frac{1}{b})(a-\frac{1}{c})$ 為整數

$\Rightarrow abc\,|\,(ab-1)(bc-1)(ca-1)$

$\Rightarrow abc\,|\,a^2b^2c^2-a^2bc-ab^2c-abc^2+ab+ac+bc-1$

$\Rightarrow abc\,|\,ab+ac+bc-1$

$\Rightarrow abc\le ab+ac+bc-1<ab+ac+bc\le c(a+a+b)$

$\Rightarrow ab<2a+b\le 3b$

$\Rightarrow a<3$

若 $a=1$，則 $bc\,|\,b+c-1$

$\Rightarrow bc-b-c+1=(b-1)(c-1)\le 0$

$\Rightarrow b=1$ (或 $c=1$，但 $b\le c$)

若 $a=2$，則 $2bc\,|\,bc+2b+2c-1$

$\Rightarrow bc \le 2b + 2c - 1 < 2b + 2c \le 4c$

$\Rightarrow b < 4$

若 $b = 2$，則 $4c \mid 4c + 3 \;\Rightarrow\; 4c \mid 3$。(不合)

若 $b = 3$，則 $6c \mid 5c + 3 \;\Rightarrow\; c \le 5$。

一一檢驗後，得 $c = 5$。

所以，$(a,b,c) = (2,3,5)$ 或 $(1,1,c)$ (其中$c \in \mathbb{N}$)

由題目的對稱性，a,b,c 的順序可以調換。

3.【解】:

歸納法第二原理：

假如 $P(n)$ 是一個敘述，$\forall n \in \mathbb{N}$，m 是一個已知固定的正整數滿足

(a) $P(1), P(2), \cdots, P(m)$ 為真，且

(b) 對所有正整數 $k \ge m$，假如 $P(i)$ 為真, $\forall i = 1, 2, \cdots, k$，則 $P(k+1)$ 為真，則對所有的正整數 n，$P(n)$ 為真。

考慮 $m = 2$ 的情形：

(a) $P(1): F_{1+1} = \sum_{k=0}^{0} \binom{1-k}{k} = 1$ 成立，

$P(2): F_{2+1} = \sum_{k=0}^{1} \binom{2-k}{k} = \binom{2-0}{0} + \binom{2-1}{1} = 2$ 成立，

(b)現在，假設 $P(i)$ 為真, $\forall i = 1, 2, \cdots, k$，則我們需要證明 $P(k+1)$ 為真。

(1) $k = 2m$：$P(k+1) = P(2m+1)$

$$
\begin{aligned}
F_{2m+1} &= F_{2m} + F_{2m-1} \\
&= \sum_{t=0}^{[\frac{2m-1}{2}]} \binom{2m-1-t}{t} + \sum_{t=0}^{[\frac{2m-2}{2}]} \binom{2m-2-t}{t} \\
&= \sum_{t=0}^{m-1} \binom{2m-1-t}{t} + \sum_{t=0}^{m-1} \binom{2m-2-t}{t} \\
&= \sum_{t=0}^{m-1} \binom{2m-1-t}{t} + \sum_{t=1}^{m} \binom{2m-1-t}{t-1} \\
&= \binom{2m-1}{0} + \sum_{t=1}^{m-1} \binom{2m-1-t}{t} + \sum_{t=1}^{m-1} \binom{2m-1-t}{t-1} + \binom{m-1}{m-1} \\
&= 1 + \sum_{t=1}^{m-1} \binom{2m-t}{t} + 1 \\
&= \binom{2m-0}{0} + \sum_{t=1}^{m-1} \binom{2m-t}{t} + \binom{2m-m}{m} \\
&= \sum_{t=0}^{[\frac{2m}{2}]} \binom{2m-t}{t} \text{ 成立。}
\end{aligned}
$$

(2) $k=2m+1$ ： $P(k+1)=P(2m+2)$

$$F_{2m+2}= F_{2m+1} + F_{,}$$

$$=\sum_{t=0}^{[\frac{2m}{2}]}\binom{2m-t}{t}+\sum_{t=0}^{[\frac{2m-1}{2}]}\binom{2m-1-t}{t}$$

$$=\sum_{t=0}^{m}\binom{2m-t}{t}+\sum_{t=0}^{m-1}\binom{2m-1-t}{t}$$

$$=\binom{2m-0}{0}+\sum_{t=1}^{m}\binom{2m-t}{t}+\sum_{t=1}^{m}\binom{2m-t}{t-1}$$

$$=\binom{2m+1}{0}+\sum_{t=1}^{m}\binom{2m-t+1}{t}$$

$$=\sum_{t=0}^{m}\binom{2m-t+1}{t}$$

$$=\sum_{t=0}^{\left[\frac{2m+1}{2}\right]}\binom{2m-t+1}{t}$$ 成立。

所以由歸納法第二原理，對所有正整數 n， $P(n)$ 為真，原式得證。

4.【解】:

$$z_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{2006}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{2006}\right), k=0,1,2,\cdots,2005$$

(1) 當 $z_0=1$ 時，

$$\left|z_0-z_k\right|^2=\left|1-\cos\left(\frac{2k\pi}{2006}\right)-i\sin\left(\frac{2k\pi}{2006}\right)\right|^2$$

$$=\left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{2006}\right)\right)^2+\sin^2\left(\frac{2k\pi}{2006}\right)$$

$$=2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{2006}\right)$$

因為 $z_0+z_1+z_2+\cdots+z_{2005}=0+0i$ ，所以

$$1+\cos\left(\frac{2\pi}{2006}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{2006}\right)+\cdots+\cos\left(\frac{4010\pi}{2006}\right)=0$$

所以

$$\left|z_0-z_1\right|^2+\left|z_0-z_2\right|^2+\ldots+\left|z_0-z_{2005}\right|^2$$

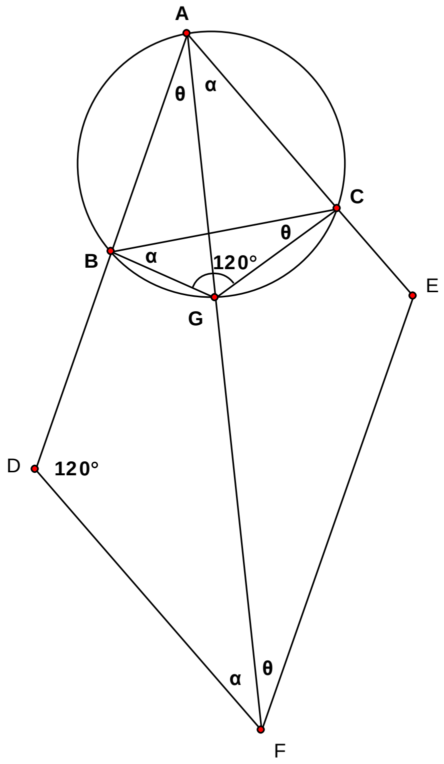
$$=2\cdot 2005\text{-}2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{2006}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{2006}\right)+\cdots+\cos\left(\frac{4010\pi}{2006}\right)\right)$$

$$=4010-2(-1)=4012$$

(2) 當 $z_0=\cos\left(\frac{2k\pi}{2006}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{2006}\right), 0<k<2005$ 時，同(1)，所求之值亦為 4012。

5. 【解】:

因為，正三角形 ΔABC 外接圓半徑為 2，所以，



$$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=2\sqrt{3}$$

$$\angle ABC=\angle BAC=\angle BCA=60^\circ$$
$$\angle BAG=\angle BCG=\angle AFE=\theta$$
$$\angle BGC=\angle ADF=\angle AEF=120^\circ$$

觀察 ΔADF，由已知 $\overline{AD}=13, \overline{DF}=\overline{AE}=11$ 可計算得

$$\overline{AF}^2=11^2+13^2-2\cdot 11\cdot 13\cdot\cos 120^\circ$$
$$\overline{AF}=\sqrt{433}$$
$$\frac{\sin\theta}{\sin 120^\circ}=\frac{11}{\sqrt{433}}$$
$$\sin\theta=\frac{11\sqrt{3}}{2\sqrt{433}}\text{ ， }\cos\theta=\frac{37}{2\sqrt{433}}\text{ 。}$$

觀察 ΔBGC，可計算得

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{BC}}=\frac{\sin\theta}{\sin 120^\circ}\text{ ， }\overline{BG}=\frac{22\sqrt{11}}{\sqrt{433}}$$

所以，

$$\Delta\text{BCG 面積 }=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{BG}\cdot\sin\left(60^\circ-\theta\right)$$
$$=\frac{429\sqrt{3}}{433}$$

$p+q+r=429+3+433=865$。