教育部九十五學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一）【參考解答】

一、【解】

設 $f(x)=x^3-px^2+qx-r=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

其中α,β,γ是$-3,-2,-1,0$，$1,2,3$中的某相異三個。

因為 $f(-1)=-1-p-q-r=-1-(p+q+r)$

所以 $p+q+r=-1-f(-1)$

$$=-1-(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)$$

$$=(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)-1$$

(i) 當α,β,γ為$1,2,3$時，$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)-1$有最大值$2\cdot3\cdot4-1=23$.

(ii) 當α,β,γ為$-3,2,3$時，$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)-1$有最小值$-2\cdot3\cdot4-1=-25$.

二、【解】

設 $u=\sec\theta-\dfrac{1}{2}\tan\theta,\quad 0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

因為$\sec^2\theta=\tan^2\theta+1$

所以$\left(u+\dfrac{1}{2}\tan\theta\right)^2=\tan^2\theta+1$

化簡得$3\tan^2\theta-4u\tan\theta+4-4u^2=0$

因為$\tan\theta$是實數，

所以$(-4u)^2-4\cdot3\cdot(4-4u^2)\ge0$

也就是 $u^2\ge\dfrac{3}{4}$

即 $u\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $u\le-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

但 $0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $\sec\theta-\dfrac{1}{2}\tan\theta>0$

所以 $u\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故$\sec\theta-\dfrac{1}{2}\tan\theta$的最小值為$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

三、【解】

先證明 $|A_{n+2}|=|A_{n+1}|+|A_n|$.

設 $x\in A_{n+1}$，令 $x=a_1a_2\cdots a_na_{n+1}a_{n+2}$

(i) $a_1=1$，此時 $a_2a_3\cdots a_na_{n+2}$

就是 $2,3,\cdots,n+2$ 的排列且符合條件。此相當於 $1,2,3,\cdots,n+1$ 所有符合條件的排列，故元素個數為 $|A_{n+1}|$.

(ii) $a_1=2$，此時 $a_2=1$，那麼

$a_3\,a_4\cdots a_{n+2}$ 就相當於 $3,4,\cdots,n+2$ 所有符合條件的排列，其排列數等於 $|A_n|$

綜合(i), (ii)可知 $|A_{n+2}|=|A_{n+1}|+|A_n|$。再由 $|A_1|=1$，$|A_2|=2$ 可得 $|A_1|,|A_2|,\cdots,|A_{11}|$ 依次為

$1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144$.

四、【證明】

畫一橢圓如圖 1，令長軸為 2a，短軸為 2b，則 $a=\sqrt{25}=5$，$b=\sqrt{9}=3$ 且

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=10$，因此 $\overline{OF_1}=\overline{OF_2}=\sqrt{25-9}=4$。

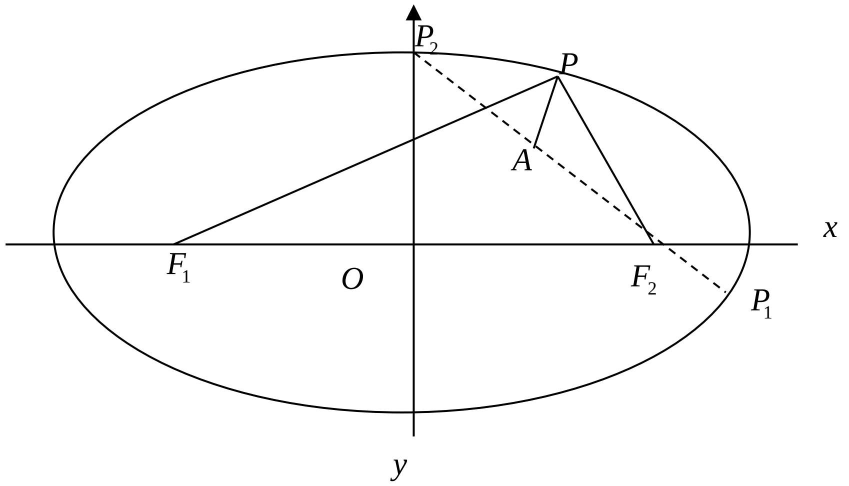
$$\overline{PA}+\overline{PF_1}=\overline{PA}+(10-\overline{PF_2})=10+\overline{PA}-\overline{PF_2}. \qquad (1)$$

利用三角不等式得

$$\overline{PA}-\overline{PF_2}\leq\overline{AF_2}=2\sqrt{2}. \qquad (2)$$

由(1)與(2)，得證 $\overline{PA}+\overline{PF_1}\leq 10+2\sqrt{2}$。同理

$$\overline{PA}+\overline{PF_1}=10-(\overline{PF_2}-\overline{PA})\geq 10-\overline{AF_2}=10-2\sqrt{2}$$



五、【證明】

(a) $(2n+3)S_{n+1}=(2n+3)\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n+1}{k}$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left[2k+1+2(n-k+1)\right]\binom{n+1}{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}+2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k(n-k+1)}{2k+1}\binom{n+1}{k}$$

因 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$，所以

$$(2n+3)S_{n+1}=2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k(n+1-k)}{2k+1}\binom{n+1}{k}$$

$$=2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n+1-k)}{2k+1}\binom{n+1}{k}$$

$$=2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}(n+1-k)\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$=2(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=2(n+1)S_n$$

(b) $S_1=\frac{2}{3}$.

由(a)知

$$S_n=\frac{2n}{2n+1}S_{n-1}=\frac{(2n)(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)}S_{n-2}=\cdots$$

$$=\frac{(2n)(2n-2)\cdots(2n-2k)}{(2n+1)(2n-1)\cdots(2n-2k+1)}S_{n-k-1}$$

$$=\frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 4}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3}S_1$$

$$=\frac{(2^n\cdot n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{4^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}$$