教育部九十四學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）【解答】

一、證明：$\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}>1+\sqrt{3}+\sqrt{15}$

【證明】：只需證明 $\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{3}>1+\sqrt{15}-2\sqrt{2}$

因為
$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{3}\right)^2=18+2\left(5\sqrt{2}-\sqrt{15}-\sqrt{30}\right)$$
$$\left(1+\sqrt{15}-\sqrt{2}\right)^2=18+2\left(\sqrt{15}-\sqrt{2}-\sqrt{30}\right)$$

所以

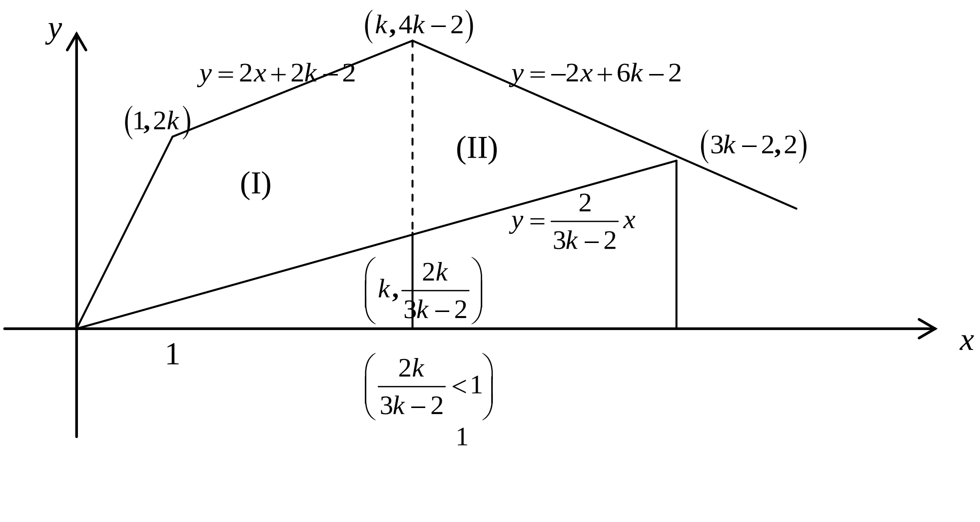
$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{3}\right)^2-\left(1+\sqrt{15}-\sqrt{2}\right)^2$$
$$=1\ 2\sqrt{\ }\ -2\ \sqrt{4}\ \ 1$$
$$=4\left(\sqrt{1}-8\sqrt{\ }\right)1>5$$

因此 $\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{3}\right)^2>\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$

故 $\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{3}>1+\sqrt{\ }\ 15\sqrt{\ }$

即有 $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}>1+\sqrt{3}+\sqrt{15}$

二、$\begin{cases} y\le 2x+2k-2 \\ y\le 2kx \\ y\ge \dfrac{2x}{3k-2} \end{cases}$ $\begin{cases} k>4 \\ \qquad y\le\ 2\ x\ (+6\ k\ ) \\ \end{cases}$



1

在區域(I)中 ，整數解為

$$
\begin{array}{cccccc}
(0,0) & & & \to & 1 & \text{組} \\
(1,1) & \cdots & (1,2k) & \to & 2k & \text{組} \\
(2,1) & \cdots & (2,2k+2) & \to & 2k+2 & \text{組} \\
(3,1) & \cdots & (3,2k+4) & \to & 2k+4 & \text{組} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(k,1) & \cdots & (k,4k-2) & \to & 4k-2 & \text{組}
\end{array}
$$

共有 $1+\sum_{i=1}^{k}2(k+i-1)=1+2k^2+2\sum_{i=1}^{k}2(i-1)=1+2k^2+k(k-1)=3k^2-k+1$ (組)

因為 k 為偶數，在區域(II)中整數解為

$$
\begin{array}{cccccc}
(k+1,1) & \cdots & (k+1,4k-4) & \to & 4k-4 & \text{組} \\
(k+2,1) & \cdots & (k+2,4k-6) & \to & 4k-6 & \text{組} \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
\left(\frac{3k}{2}-1,1\right) & \cdots & \left(\frac{3k-1}{2},3k\right) & \to & 3k & \text{組} \\
\hline
\left(\frac{3k}{2},2\right) & \cdots & \left(\frac{3k}{2},3k-2\right) & \to & 3k-3 & \text{組} \\
\left(\frac{3k}{2}+1,2\right) & \cdots & \left(\frac{3k}{2}+1,3k-4\right) & \to & 3k-5 & \text{組} \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
(3k-2,2) & \cdots & \cdots & \to & 1 & \text{組}
\end{array}
$$

共有 $\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}}(4k-2i-2)+\sum_{i=0}^{\frac{3k}{2}}(3k-2i-3)$

$$
\begin{aligned}
&=(4k-2)\left(\frac{k}{2}-1\right)-2\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1}i+(3k-3)\left(\frac{3k}{2}-1\right)-2\sum_{i=1}^{\frac{3k}{2}-2}i \\
&=\left(4k-\frac{k}{2}-2\right)\left(\frac{k}{2}-1\right)+\left(\frac{3k}{2}-1\right)\left(\frac{3k}{2}-1\right) \\
&=4k^2-\frac{15}{2}k+3
\end{aligned}
$$

而 $3k^2-k+1+4k^2-\frac{15}{2}k+3=7k^2-\frac{17}{2}k+4$

因此，總共有 $7k^2-\frac{17}{2}k+4$ 個整數解。

三、【證明】：由根與係數關係知 $\begin{cases} u+v+uv=-a \\ uv(1+u+v)=b \\ u^2v^2=-c \end{cases}$

$$\therefore b-c=uv(1+u+v+uv)=uv(1-a)$$

$$\Rightarrow uv=\frac{b-c}{1-a}\in\mathbb{Q}\ \left(\because a\neq 1,\ a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$$

又 $u^2v^2=-c\in\mathbb{Z}$，$\therefore uv\in\mathbb{Z}$，即 $w\in\mathbb{Z}$。

四、設底部三角形與兩側面的共邊邊長分別為 a,b，它們夾角為 θ，稜柱高為 c。

那麼 $L=ac+bc+\frac{1}{2}ab\sin\theta$，體積 $V=\frac{1}{2}abc\sin\theta$，

令 $X=ac,\ Y=bc,\ Z=\frac{1}{2}ab\sin\theta$，那麼 $L=X+Y+Z$ 且 $V^2=\frac{1}{2}XYZ\sin\theta$

由算術－幾何不等式得

$$(XYZ)^{\frac{1}{3}}\le\frac{X+Y+Z}{3}$$

所以

$$V^2\le\frac{1}{2}\left(\frac{L}{3}\right)^3\sin\theta\le\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{L}{3}\right)^3,\quad 即 V\le\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{L}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

當 $X=Y=Z=\frac{L}{3},\ \theta=\frac{\pi}{2}$ 時，V 達到最大值 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{L}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

一組可能邊長為 $a=b=2c=\sqrt{\frac{2L}{3}}$。

五、假設從 P 點出發，走了 k 次後到 Q 點，令 $P_0=P,P_1,\cdots,P_n=Q$ 為路徑中停駐的點，則 $\overrightarrow{PQ}=\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$，

令 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{ma}+\overrightarrow{na}$，$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}=m_i\vec{a}+n_i\vec{b}$

$m=\sum_{i=1}^{k}m_i$，$n=\sum_{i=1}^{k}n_i$，每一步 $m_i\vec{a}+n_i\vec{b}$ 有以下 6 種可能：

$$(m_i,n_i)\in\{(1,1),(-1,-1),(2,-1),(-2,1),(1,-2),(-1,2)\}$$

$m_i-n_i=0,\pm3$　因而 m_i-n_i 是 3 的倍數，

所以 $m-n=\sum_{i=1}^{k}(m_i-n_i)$ 也是 3 的倍數。