94學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第三區（台北市）　筆試(一)【參考解答】

問題一：設a_0為一正整數，而對每個正整數n，令$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}$。試求滿足$\sum_{n=0}^{27}a_n\geq 33$的最小正整數$a_0$。(12分)

解：依定義，可得

$$a_1=\frac{1}{3}a_0+\frac{1}{2}，$$

$$a_2=\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(\frac{1}{3}a_0+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{1}{3^2}a_0+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3})，$$

$$a_3=\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(\frac{1}{3^2}a_0+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}))+\frac{1}{2}=\frac{1}{3^3}a_0+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2})。$$

根據數學歸納法，可證得：對每個正整數n，恆有

$$a_n=\frac{1}{3^n}a_0+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}})。$$

進一步化簡可得

$$a_n=\frac{1}{3^n}a_0+\frac{1}{2}\times\frac{1\cdot(1-1/3^n)}{1-1/3}=\frac{1}{3^n}a_0+\frac{3}{4}\times(1-\frac{1}{3^n})=\frac{1}{3^n}(a_0-\frac{3}{4})+\frac{3}{4}。\qquad(*)$$

請注意：(*)式對每個非負整數n都成立。由此可得

$$\sum_{n=0}^{27}a_n=\sum_{n=0}^{27}\frac{1}{3^n}(a_0-\frac{3}{4})+\sum_{n=0}^{27}\frac{3}{4}=(a_0-\frac{3}{4})\times\frac{1\cdot(1-1/3^{28})}{1-1/3}+\frac{3}{4}\times 28$$

$$=\frac{3}{2}(a_0-\frac{3}{4})\times(1-\frac{1}{3^{28}})+21。$$

因為

$$\sum_{n=0}^{27}a_n\geq 33，$$

所以，得

$$\frac{3}{2}(a_0-\frac{3}{4})\times(1-\frac{1}{3^{28}})+21\geq 33，$$

$$a_0\geq\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times 12\times\frac{3^{28}}{3^{28}-1}=\frac{3}{4}+8\times(1+\frac{1}{3^{28}-1})=\frac{35}{4}+\frac{8}{3^{28}-1}。$$

因為$8/(3^{28}-1)<1/4$，所以，$8<35/4+8/(3^{28}-1)<9$。於是，所求的最小正整數a_0為9。

問題二：若對所有正實數x，下述不等式恆成立：

$$(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2\geq a\left((x+\frac{1}{x})^3+(x^3+\frac{1}{x^3})\right),$$

則常數a的最大值為何？(12 分)

解：因為 $(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2=(x+\frac{1}{x})^6-(x^3+\frac{1}{x^3})^2$

$$=\left((x+\frac{1}{x})^3+(x^3+\frac{1}{x^3})\right)\left((x+\frac{1}{x})^3-(x^3+\frac{1}{x^3})\right),$$

而對每個正實數x，$(x+x^{-1})^3+(x^3+x^{-3})>0$，所以，上述不等式可改寫成

$$(x+\frac{1}{x})^3-(x^3+\frac{1}{x^3})\geq a，或\quad 3(x+\frac{1}{x})\geq a。$$

因為對每個正實數x，恆有$x+x^{-1}\geq 1+1^{-1}=2$，所以，$6\geq a$。亦即：若本題中的不等式 $\left((x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2\right)\geq a\left((x+\frac{1}{x})^3+(x^3+\frac{1}{x^3})\right)$對所有正實數$x$都成立，則常數$a$的最大值為$6$。||

問題三：設有理係數四次方程式$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$的四個根為r_1、r_2、r_3 與r_4。已知r_1+r_2是有理數且$r_1+r_2\neq r_3+r_4$，試證r_1r_2也是有理數。(12 分)

證：令$p=r_1+r_2$、$q=r_3+r_4$、$u=r_1r_2$、$v=r_3r_4$。依根與係數的關係，可得

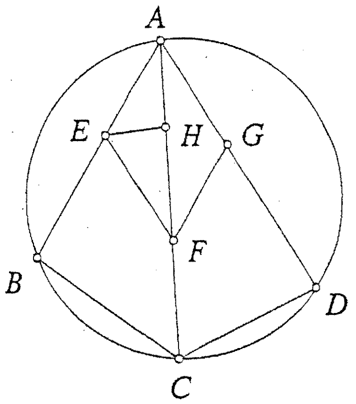
$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3+r_4=-\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4=\dfrac{c}{a} \\ r_2r_3r_4+r_1r_3r_4+r_1r_2r_4+r_1r_2r_3=-\dfrac{d}{a} \\ r_1r_2r_3r_4=\dfrac{e}{a} \end{cases},\quad 或\quad \begin{cases} p+q=-\dfrac{b}{a} \\ u+pq+v=\dfrac{c}{a} \\ pv+qu=-\dfrac{d}{a} \\ uv=\dfrac{e}{a} \end{cases}。$$

因為a、b與p都是有理數，所以，由上述第一式，可知q是有理數。將第二式乘以$-p$後與第三式相加，得

$$(-p+q)u-p^2q=\frac{-pc-d}{a}。$$

因為a、c、d 、p與q都是有理數，所以，由上述等式，可知$(-p+q)u$是有理數。因為p、q與$(-p+q)u$都是有理數且$-p+q\neq 0$，所以，u是有理數，亦即：r_1r_2是有理數。||

問題四： 設 $ABCD$ 為一圓內接四邊形。若點 E、F 與 G 分別在線段 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 與 $\overline{AD}$ 上且 $AEFG$ 為一平行四邊形，試證：$\overline{AC}\times\overline{AF}=\overline{AB}\times\overline{AE}+\overline{AD}\times\overline{AG}$。(13 分)



證 1： 設 $\angle ABC \ge \angle ADC$。因為 $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$，所以，$\angle ABC \ge 90^\circ$。於是，$\overline{AC}\ge\overline{AB}$。設點 H 在 $\overrightarrow{AC}$ 上且 $\overline{AC}\times\overline{AH}=\overline{AB}\times\overline{AE}$，則 $\overline{AH}\le\overline{AE}\le\overline{AB}\le\overline{AC}$，即點 H 在 $\overline{AC}$ 上。因為

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}，\angle BAC=\angle HAE，$$

所以，$\triangle ABC\sim\triangle AHE$。於是，$\angle ACB=\angle AEH$。

因為四點 A、B、C、D 共圓，所以，$\angle BCD=180^\circ-\angle BAD$。因為 $AEFG$ 是平行四邊形，所以，$\angle AEF=180^\circ-\angle BAD$。於是，$\angle BCD=\angle AEF$。進一步由 $\angle ACB<\angle BCD$ 可得 $\angle AEH<\angle AEF$。由此可知：點 H 在 $\overline{AF}$ 上。

因為 $\angle AEF=\angle BCD$ 且 $\angle AEH=\angle ACB$，所以，$\angle FEH=\angle ACD$。因為 $AEFG$ 是平行四邊形，所以，$\angle HFE=\angle DAC$ 且 $\overline{FE}=\overline{AG}$。於是，$\triangle ACD\sim\triangle FEH$，

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{FH}}，$$

$$\overline{AC}\times\overline{FH}=\overline{AD}\times\overline{FE}。$$

將兩式相加，即得

$$\begin{aligned}\overline{AC}\times\overline{AF}&=\overline{AC}\times(\overline{AH}+\overline{FH})=\overline{AC}\times\overline{AH}+\overline{AC}\times\overline{FH}\\&=\overline{AB}\times\overline{AE}+\overline{AD}\times\overline{FE}=\overline{AB}\times\overline{AE}+\overline{AD}\times\overline{AG}\text{。} \quad \|\end{aligned}$$

證 2： 連 $\overline{BC}$。依 Ptolemy 定理，可得 $\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}$。因為 $\triangle AEF\sim\triangle DCB$，所以，$\overline{BD}:\overline{AF}=\overline{CD}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{BC}:\overline{AG}$。由此即得。 $\|$