94 學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第三區（台北市）　筆試(一)試題

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

問題一： 設 a_0 為一正整數，而對每個正整數 n，令 $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{2}$。試求滿足 $\sum_{n=0}^{27} a_n \geq 33$ 的最小正整數 a_0。 (12 分)

問題二： 若對所有正實數 x，下述不等式恒成立：

$$(x+\frac{1}{x})^6 - (x^6 + \frac{1}{x^6}) - 2 \geq a\left((x+\frac{1}{x})^3 + (x^3 + \frac{1}{x^3})\right),$$

則常數 a 的最大值為何？(12 分)

問題三： 設有理係數四次方程式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 的四個根為 r_1、r_2、r_3 與 r_4。已知 $r_1 + r_2$ 是有理數且 $r_1 + r_2 \neq r_3 + r_4$，試證 $r_1 r_2$ 也是有理數。(12 分)

問題四： 設 $ABCD$ 為一圓內接四邊形。若點 E、F 與 G 分別在線段 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 與 $\overline{AD}$ 上且 $AEFG$ 為一平行四邊形，如圖所示，試證：$\overline{AC} \times \overline{AF} = \overline{AB} \times \overline{AE} + \overline{AD} \times \overline{AG}$。(13 分)