94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高雄區）　筆試(一)【參考解答】

注意：請在答案卷上作答，須詳列過程及說明理由

作答時間二小時

1、設 $f(x)=x^{2005}+x^{2004}+\ldots+x+1$，試求 $f(x^{2006})$ 除以 $f(x)$ 所得的餘數。

（解）：$f(x^{2006})=(x^{2006})^{2005}+(x^{2006})^{2004}+\ldots.+x^{2006}+1$

$=【(x^{2006})^{2005}-1】+【(x^{2006})^{2004}-1】+\ldots+(x^{2006}-1)+2006$

$=(x^{2006}-1)【H(x)】+2006$

$=(x-1)【(x^{2006})^{2005}+(x^{2006})^{2004}+\ldots.+x^{2006}+】H(x)+2006$

故 $f(x^{2006})$ 除以 $f(x)$ 所得的餘數為 2006

2、設 a,b,n 為整數，若 $a+b$ 可被 n 所整除，且 a^2+b^2 可被 n^2 所整除。

試證：對所有正整數 k, a^k+b^k 可被 n^k 所整除。

（解）：只需證明 $n|a$, 且 $n|b$.

因為 $n|b.\ 2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$, 所以 $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$, $n^2|2ab$.

$p^m|a, p^m|b$. 令 p 為 n 的任意質因數，且 m 為其冪次方，a,b

$\therefore p^{\alpha}|2ab$, 其中 $\alpha\geq 2m$, 因此 $p^{\beta}|ab$, 其中 $\beta\geq 2m-1$.

所以 a,b 中至少有一數被 p^m 整除。又 $p^m|a+b$,

因此 $p^m|a, p^m|b$. 故 $n|a$, 且 $n|b$. 得證。

3、已知正數 a,b,c 滿足 $abc=1$. 試證：

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\sqrt{2}\quad\text{(難)}$$

(解)：利用算幾不等式 $\dfrac{(b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{2}\geq\sqrt{(b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}}$, 因此 $\dfrac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{1+b+\frac{1}{a}}$.

同理可得：$\dfrac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{1+c+\frac{1}{b}}$, 及 $\dfrac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{1+a+\frac{1}{c}}$.

所以 原式左邊 $\geq\dfrac{\sqrt{2}}{1+b+\frac{1}{a}}+\dfrac{\sqrt{2}}{1+c+\frac{1}{b}}+\dfrac{\sqrt{2}}{1+a+\frac{1}{c}}=\sqrt{2}$

(因為 $abc=1$, 所以

$$\frac{1}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+c+\frac{1}{b}}+\frac{1}{1+a+\frac{1}{c}}=\frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{1+a+ab}=1.)$$

4、在 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$D$ 為 $\overline{AC}$ 的中點、且 $\overline{BD}=\sqrt{3}$。試問當 $\angle BAC$ 為何值時，ΔABC 的面積有最大值？此面績最大值為何？

(解)：設 $c=\overline{AB}=\overline{AC}$ 及 $\alpha=\angle BAC$

利用餘弦定理 $3=c^2+(\frac{c}{2})^2-c^2\cos\alpha$ 得 $c^2=\dfrac{12}{5-4\cos\alpha}$，

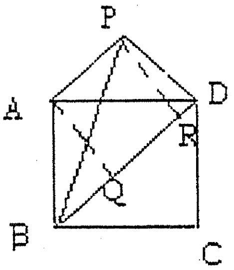
ΔABC 面積 $=\dfrac{1}{2}c^2\sin\alpha=\dfrac{6\sin\alpha}{5-4\cos\alpha}=\dfrac{12}{9\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}}$

因為 $9\tan\dfrac{\alpha}{2}+\cot\dfrac{\alpha}{2}\geq 6$，故當 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$ 時，所求 ΔABC 面積有最大值 2。

5、設正方形$ABCD$的邊長為2，若P為正方形外之一點使$\overline{AP}//\overline{BD}$，且$\overline{BP}=\overline{BD}$，

試求：(a) $\angle APD$的度數 (b) 線段$\overline{AP}$之長

(解)：過A及P分別作$\overline{BD}$的垂線，得到垂足Q，R



由$\overline{AP}//\overline{BD}$，得AQ=PR，又$\angle ABD=45^\circ$，

故$AQ=BQ=PR=\sqrt{2}$ $\because BD=BP=2\sqrt{2}$，$\therefore PR=\frac{1}{2}BP$，

$\angle PBR=30^\circ$ 得到$\angle BPD=\angle BDP=75^\circ$而有$\angle APD=105^\circ$

$BR=\sqrt{BP^2-PR^2}=\sqrt{6}$， $AP=QR=BR-BQ=\sqrt{6}-\sqrt{2}$