教育部九十四學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一）【解答】

一、【解】 $P_k=\text{Prob}$（排在第 k 個位置得到電影票）

$=\text{Prob}$（第 k 個人與前面$\left(k-1\right)$之中有相同生日| 前面$\left(k-1\right)$人生日皆不同）

$$=\frac{P_{365,k-1}}{365^{k-1}}\cdot\frac{k-1}{365}$$

其中 $P_{m,r}=\dfrac{n!}{\left(n-r\right)!}$

欲求k使得P_k有最大值；也就是找到最大的k使得$P_{k+1}-P_k<0$，

$$\frac{P_{k+1}}{P_k}=\frac{\dfrac{P_{365,k}}{365^k}\cdot\dfrac{k}{365}}{\dfrac{P_{365,k-1}}{365^{k-1}}\cdot\dfrac{k-1}{365}}=\left(\frac{365-k+1}{365}\right)\left(\frac{k}{k-1}\right)<1$$

$k\doteq 19.612 \qquad \therefore k=20$

二、【證】 令 $N=\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$

令 $b=\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$，則 $N=b+\dfrac{1}{b}$ 。

假設N是有理數

由等式 $b^{m+1}+\dfrac{1}{b^{m+1}}=\left(b+\dfrac{1}{b}\right)\left(b^m+\dfrac{1}{b^m}\right)-\left(b^{m-1}+\dfrac{1}{b^{m-1}}\right)$

$m=1$，$b^2+\dfrac{1}{b^2}=N\cdot N-2$是有理數

$m=2$ ，$b^3+\dfrac{1}{b^3}=N\cdot\left(b^2+\dfrac{1}{b^2}\right)-N$是有理數

$m=3$ ，$b^4+\dfrac{1}{b^4}=N\cdot\left(b^3+\dfrac{1}{b^3}\right)-\left(b^2+\dfrac{1}{b^2}\right)$是有理數

$\cdots$

$b^m+\dfrac{1}{b^m}$是有理數$\forall m\in\mathbb{N}$，$b^n+\dfrac{1}{b^n}$亦是有理數

但$b^n+\dfrac{1}{b^n}=a+\sqrt{a^2-1}+a-\sqrt{a^2-1}=2a$是有理數矛盾

$\Rightarrow N=\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ 是無理數。

三、【證】比較實部與虛部，原方程與下組方程等價

$$\begin{cases}(1-a)x_1+(1+a)x_2+px_3+px_4=p\\(1+a)x_1-(1-a)x_2-px_3+px_4=0\end{cases}\qquad(*)$$

將其改寫為

$$\begin{cases}(x_2-x_1)a+(x_3+x_4-1)p=-(x_1+x_2)\\(x_1+x_2)a+(-x_3+x_4)p=x_2-x_1\end{cases}\qquad(**)$$

若 $\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3+x_4-1\\x_2+x_1 & -x_3+x_4\end{vmatrix}\neq 0$

則 a 可表為 x_1,x_2,x_3,x_4 之有理函數，故 a,p 必為有理數，與假設矛盾

因此若原方程有整數解 $\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3+x_4-1\\x_1+x_2 & -x_3+x_4\end{vmatrix}=0$，同時(**)因有解，

故 $(x_2-x_1):(x_1+x_2)=(x_3+x_4-1):(-x_3+x_4)=-(x_1+x_2):(x_2-x_1)$

因此 $(x_2-x_1)^2+(x_1+x_2)^2=0$

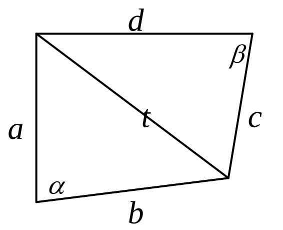
$$\|$$

$$2\left(x_1^2+x_2^2\right)$$

$$x_1=x_2=0$$

代回(**)，因 $p\neq 0$，有 $\begin{cases}x_3=x_4\\x_3+x_4=1\end{cases}$，解得 $x_3=x_4=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$。

四、【證】如圖，$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\beta$，



$$ab\cos\alpha-cd\cos\beta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}$$

四邊形面積 $S=\frac{1}{2}\left(ab\sin\alpha+cd\sin\beta\right)$

$$S^2=\frac{1}{4}\left(a^2b^2\sin^2\alpha+c^2d^2\sin^2\beta+2abcd\sin\alpha\sin\beta\right)$$

$$\frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4}=a^2b^2\cos^2\alpha+c^2d^2\sin^2\beta-2abcd\cos\alpha\cos\beta$$

$$4S^2+\frac{1}{4}\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2=a^2b^2+c^2d^2-2abcd\cos\left(\alpha+\beta\right)$$

$$S^2=\frac{1}{16}\left\{4\left(a^2b^2+c^2d^2\right)-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2-fabcd\cos\left(\alpha+\beta\right)\right.$$

$$\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)=\frac{1}{16}\left(-a+b+c+d\right)\left(a-b+c+d\right)$$

$$\cdot\left(a+b+c-d\right)\left(a+b-c+d\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(c+d\right)^2-\left(a-b\right)^2\right)\left(\left(a+b\right)^2-\left(c-d\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left\{\left(c+d\right)^2\left(a+b\right)^2+\left(a-b\right)^2\left(c-d\right)^2-\left(a^2-b^2\right)^2-\left(c^2-d^2\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{16}\left\{2\left(a^2+b^2\right)\left(c^2-d^2\right)+fabcd-\left(a^2-b^2\right)^2-\left(c^2-d^2\right)^2\right\}$$

$$\therefore s^2=\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)-\frac{1}{2}abcd\left(1+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

$$=\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$s\le\sqrt{\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)}\le\left(\frac{\left(s-a\right)+\left(s-b\right)+\left(s-c\right)+\left(s-d\right)}{4}\right)^2$$

$$=\left(\frac{s}{2}\right)^2$$

當 $a=b=c=d=\frac{s}{2}$ 時，$A=180^0$ 時，四邊形為正方形，且 $s=\left(\frac{s}{2}\right)^2$

故周長為 $2s$ 最大面積之四邊形為正方形。