94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高屏區）　筆試(二)試題【參考解答】

注意：請在答案卷上作答，須列過程及說明理由
　　　作答時間一小時

1、實數 x,y,z 滿足方程組 $\begin{cases} x+y+z=-3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{3} \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-24 \end{cases}$，求 $x^2+y^2+z^2=?$

Sol:

$$\begin{cases} x+y+z=-3 & (1) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{3} & (2) \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-24 & (3) \end{cases}$$

由第(2)式得　$yz+xz+xy=-\dfrac{1}{3}xyz$

由第(3)式得　$(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz=-24$

所以 $xyz=12$

$yz+xz+xy=-4$

因此根據根與係數之關係可得 $t^3+3t^2-4t-12=0$

$(t-2)(t+2)(t+3)=0$，所以 $x^2+y^2+z^2=17$

2、試求49除 $6^{98}+8^{98}$ 的餘數。

Sol:

由 $6^{98}+8^{98}=(7-1)^{98}+(7+1)^{98}$

$$=\left(7^{98}-C_1^{98}\times7^{97}\times1+\cdots+C_{97}^{98}\times7^1\times1^{97}+1\right)+$$
$$\left(7^{98}+C_1^{98}\times7^{97}\times1+\cdots+C_{97}^{98}\times7^1\times1^{97}+1\right)$$
$$=49\times Q+2$$

故餘數為2

3、設 $\bar{a}=<x,2>,\bar{b}=<\sqrt{3},y>$; 其中 x,y 皆為實數，若 $x^2+y^2=7$，

試求：$\bar{a}\cdot\bar{b}$ 之最大值。

Sol:

$\because \bar{a}\cdot\bar{b}=\sqrt{3}x+2y$，由 $\left(\sqrt{3}x+2y\right)^2\leq(3+4)\left(x^2+y^2\right)=7^2$ $\therefore \bar{a}\cdot\bar{b}\leq 7$

4、已知 $f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s$ 和 $g(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

滿足 $f(-1)<g(-1)$，$f(0)>g(0)$，$f(1)<g(1)$，$f(2)>g(2)$。

試證：$2(p-a)+(b-q)+(c-r)+(s-d)>0$

Sol:

令 $k(x)=f(x)-g(x)=(p-a)x^3+(q-b)x^2+(r-c)x+(s-d)$

$k(-1)<0$, $k(0)>0$, $k(1)<0$, $k(2)>0$

所以有三根分別介於 $(-1,0),(0,1),(1,2)$ 區間

令此三根性質分別為 $-1<a<0$, $0<b<1$, $1<c<2$

則 $0<a+b+c<3$, $-3<ab+ac+bc<2$, $-2<abc<0$

即 $0<\dfrac{b-q}{p-a}<3$, $-3<\dfrac{r-c}{p-a}<2$, $-2<\dfrac{d-s}{p-a}<0$

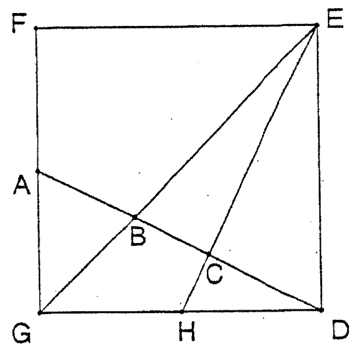
$0<\dfrac{b-q}{p-a}+2+\dfrac{c-r}{p-a}+\dfrac{s-d}{p-a}<10$,

因為 $k(0)>0$, 所以 $s>d$, 即 $p>a$

因此 $2(p-a)+(b-q)+(c-r)+(s-d)>0$

5. 如圖，$DEFG$ 為正方形，A、H 分別是 $\overline{FG}$、$\overline{GD}$ 的中點，$\overline{DA}$ 分別與 $\overline{GE}$、$\overline{HE}$

相交於點 B、C，求 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}$ 之比值。



Sol:

由 $\overline{AG}:\overline{ED}=1:2$ 得 $\overline{GB}:\overline{BE}=1:2$ 及 $\overline{AB}:\overline{BD}=1:2$

又 $\overline{GH}:\overline{HD}=1:1$

利用孟式定理：$\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HG}}\cdot\dfrac{\overline{GE}}{\overline{EB}}\cdot\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=1$

得 $\overline{BC}:\overline{CD}=2:3$ $\therefore \overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=5:4:6$

6. 在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=8$，$\overline{AC}=9$，過$\triangle ABC$的內心I作$\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$，分別交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$於點$D$、$E$，試求$\overline{DE}$之長。

Sol:

設內切圓半徑為 r，s 為三邊長和之半，即$s=\frac{1}{2}(7+8+9)=12$

取$\overline{AH}$為$\triangle ABC$在$\overline{BC}$邊的高，F為$\overline{AH}$和$\overline{DE}$之交點

由海龍公式：$\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{2}$周長$\times r$

即$\Delta ABC=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=12r$

而得$12\sqrt{5}=12r \therefore r=\sqrt{5}$

又$\Delta ABC=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\overline{AH}=12\sqrt{5}$

得$\overline{AH}=3\sqrt{5}$

$\overline{AF}:\overline{AH}=\left(3\sqrt{5}-\sqrt{5}\right):3\sqrt{5}=2:3$

由$\overline{DE}:\overline{BC}=\overline{AF}:\overline{AH}$

得$\overline{DE}=\overline{BC}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}}=8\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$

故$\overline{DE}$之長為$\frac{16}{3}$