九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

北區　第三區（成功高中）　　筆試(一)【參考解答】

問題一：

給定一矩形 $ABCD$ 及分別在邊 $\overline{BC}$ 上、邊 $\overline{CD}$ 上的各一點 E、F。設$\triangle ABE$、$\triangle AEF$ 與$\triangle AFD$ 的面積分別爲α 、β與γ。

(1)令 $\overline{BE}=a$，$\overline{EC}=b$、$\overline{CF}=c$、$\overline{FD}=d$，試以 a、b、c 與 d 表示$\triangle AEF$ 的面積β。(5 分)

(2)試以α 、β與γ 表示矩形 $ABCD$ 的面積 (不能含 a、b、c、d)。(8 分)

解：(1)因爲矩形 $ABCD$ 的面積爲$(a+b)(c+d)$，$\triangle ABE$、$\triangle CEF$ 與$\triangle AFD$ 的面積分別爲 $a(c+d)/2$、$bc/2$與$d(a+b)/2$，所以，可得

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)/2+bc/2+d(a+b)/2+\beta \text{。}$$

由此可得

$$\beta=\frac{1}{2}[2(a+b)(c+d)-a(c+d)-bc-d(a+b)]$$

$$=\frac{1}{2}(ac+bc+bd) \text{。}$$

(2)令 x 表示矩形 $ABCD$ 的面積。因爲

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{a(c+d)}{2} \\ \beta=\dfrac{ac+bc+bd}{2} \\ \gamma=\dfrac{d(a+b)}{2} \end{cases},$$

所以，可得

$$x=(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd=2\beta+ad=2\beta+\frac{2\alpha}{c+d}\cdot\frac{2\gamma}{a+b}$$

$$=2\beta+\frac{4\alpha\gamma}{x} \text{。}$$

移項、化簡、解方程式，即得

$$x^2-2\beta x-4\alpha\gamma=0,$$

$$x=\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\alpha\gamma} \text{。}$$

因爲$x>0$，所以，$x=\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha\gamma}$ 。 ||

問題二：

試求出滿足下述兩方程式的所有數對 (x,y)，其中 $x>0$ 而 $0\le y<2\pi$：

$$\cos y+\frac{1}{4}\cos 4y=x\cos y，$$

$$\sin y-\frac{1}{4}\sin 4y=x\sin y。\quad (12\text{ 分})$$

解：將第一式乘以 $\sin y$、第二式乘以 $\cos y$、相減，即得

$$\sin y\cos 4y+\sin 4y\cos y=0，$$

$$\sin 5y=0。$$

由此得

$$y=\frac{k\pi}{5}，\quad k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9。$$

當 k 是奇數 $2n+1\,(n=0,1,2,3,4)$，$4y+y=(2n+1)\pi$。因此，得

$$\cos 4y=-\cos y，\sin 4y=\sin y，x=\frac{3}{4}。$$

因此，在此情形中，所求數對為

$$(x,y)=(\frac{3}{4},\frac{\pi}{5}),(\frac{3}{4},\frac{3\pi}{5}),(\frac{3}{4},\frac{5\pi}{5}),(\frac{3}{4},\frac{7\pi}{5})\text{或}(\frac{3}{4},\frac{9\pi}{5})。$$

當 k 是偶數 $2n\,(n=0,1,2,3,4)$，$4y+y=2n\pi$。因此，得

$$\cos 4y=\cos y，\sin 4y=-\sin y，x=\frac{5}{4}。$$

因此，在此情形中，所求數對為

$$(x,y)=(\frac{5}{4},0),(\frac{5}{4},\frac{2\pi}{5}),(\frac{5}{4},\frac{4\pi}{5}),(\frac{5}{4},\frac{6\pi}{5})\text{或}(\frac{5}{4},\frac{8\pi}{5})。\|$$

問題三：

(1)試證：存在兩個正整數 a 與 b 滿足 $a^2-b^2=101$。(4 分)

(2)試求滿足下述條件的正整數 n 之最小值：在任意 n 個（$n\ge 2$）相異的正整數中，必存在兩相異數 a 與 b 使得 a^2-b^2 是 101 的倍數。(8 分)

證：(1)因爲 101 是質數，所以，由 $(a+b)(a-b)=101$ 可得 $a+b=101$ 且 $a-b=1$。解得：$a=51$，$b=50$。

(2)因爲 101 是質數，所以，由 101 整除 $(a+b)(a-b)$ 可知 101 整除 $(a-b)$ 或 101 整除 $(a+b)$。101 整除 $(a-b)$ 表示將 a 與 b 分別除以 101，所得的餘數相等；101 整除 $(a+b)$ 表示將 a 與 b 分別除以 101，所得的餘數之和等於 101。

因爲由 51 至 101 的五十一個正整數中，任何兩相異數的和與差都不是 101 的倍數，所以，滿足本題所述條件的正整數 n 必大於 51。我們將證明滿足本題所述條件的正整數 n 之最小值爲 52。

設 $a_1, a_2, \cdots, a_{52}$ 是任意 52 個相異正整數，對每個 $i=1,2,\cdots,52$，令 r_i 表示 a_i 除以 101 的餘數，又令

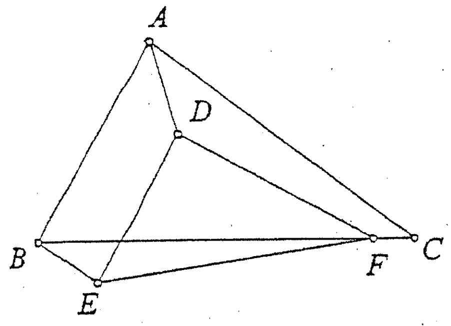
$$s_i=\begin{cases} r_i, & \text{若 } 0\le r_i\le 50; \\ 101-r_i, & \text{若 } 51\le r_i\le 100; \end{cases}$$

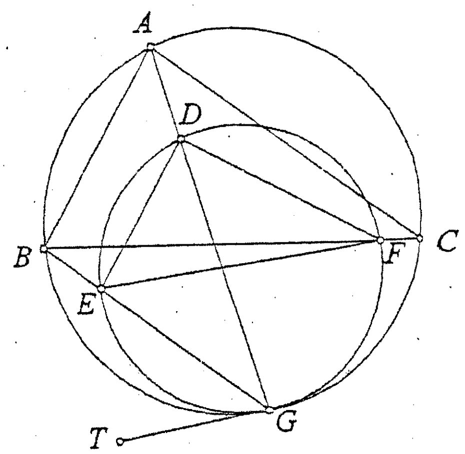
則 $s_1, s_2, \cdots, s_{52}$ 等 52 個整數都屬於集合 $\{0,1,2,\cdots,50\}$。因爲此集合只有 51 個元素，所以，依鴿籠原理知：必存在一對 i 與 j $(1\le i<j\le 52)$ 使得 $s_i=s_j$。由此進一步得 $r_i=r_j$ 或 $r_i+r_j=101$。不論是哪一種情形，都可得 $101 \mid (r_i+r_j)(r_i-r_j)$，

$101 \mid (a_i+a_j)(a_i-a_j)$，亦即：$a_i^2-a_j^2$ 是 101 的倍數。‖

問題四：

在$\triangle ABC$的內部選取一點D使得$\angle CAD = \angle ACB$，過點D作一直線與$\overline{AB}$平行，過頂點B作一直線與$\overline{AC}$平行，設兩平行線相交於點E。在$\overline{BC}$上選取一點F使得$\angle DFE = \angle ACB$且點F與點E在直線AD的異側。試證：$\triangle ABC$的外接圓與$\triangle DEF$的外接圓相切。(12 分)





證：設直線AD與BE相交於點G。因為$\overline{AC}$與$\overline{BG}$平行，所以，$\angle AGB = \angle CAD$。再依$\angle CAD = \angle ACB$的假設，可得

$$\angle AGB = \angle CAD = \angle ACB \text{。}$$

於是，A、B、G與C四點共圓。另一方面，依$\angle DFE = \angle ACB$的假設，可得

$$\angle DFE = \angle ACB = \angle AGB = \angle DGE \text{。}$$

於是，D、E、G與F四點共圓。由此可知：$\triangle ABC$的外接圓與$\triangle DEF$的外接圓相交於點G。

設直線GT是$\triangle ABC$的外接圓過點G的切線，其中點T與點B、點E在直線AD的同側。依弦切角定理，可知$\angle GAB = \angle BGT$。另一方面，因為$\overline{DE}$與$\overline{AB}$平行，所以，$\angle GAB = \angle GDE$。於是，可得

$$\angle GDE = \angle GAB = \angle BGT = \angle EGT \text{。}$$

依弦切角定理，可知直線GT與$\triangle DEF$的外接圓相切於點G。因此，$\triangle ABC$的外接圓與$\triangle DEF$的外接圓相切於點G。 ‖