九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區　第一區（花蓮高中）　　筆試(一)【參考解答】

【問題一】

令大矩形的長被鉛直線分成長度為p與q的兩個線段；寬被水平線分成長度為r與s的兩個線段。此時，$A = pr, a = qs, B = qr, b = ps$。

(1) 由題意知

$$\begin{aligned} qs + pr = ps + qr &\Rightarrow q(s-r) = p(s-r) \\ &\Rightarrow (p-q)(s-r) = 0 \\ &\Rightarrow p-q = 0 \text{ 或 } s-r = 0 \\ &\Rightarrow p = q \text{ 或 } s = r. \end{aligned}$$

故當鉛直線或水平線平分大矩形面積時，等式

$$a + A = b + B$$

成立。

(2) 由題意知

$$\begin{aligned} \frac{pr}{qs} = \frac{qr}{ps} &\Rightarrow q^2 = p^2 \\ &\Rightarrow (q+p)(q-p) = 0 \\ &\Rightarrow q = p. \end{aligned}$$

故當鉛直線平分大矩形面積時，等式

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$

成立。

(3) 由題意知

$$\begin{aligned} pr - qs = qr - ps &\Rightarrow p(s+r) = q(s+r) \\ &\Rightarrow q = p \end{aligned}$$

故當鉛直線平分大矩形面積時，等式

$$A - a = B - b$$

成立。

(4) 由題意知

$$qs \cdot pr = ps \cdot qr \Rightarrow 0 = 0.$$

故無論鉛直線或水平線為何，等式

$$aA = bB$$

恆成立。

【問題二】

試找出一個能刻劃出所有滿足$\dfrac{23}{41}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{32}{57}$的分數$\dfrac{a}{b}$的通式。滿足條件$\dfrac{23}{41}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{32}{57}$中分母最小的一個分數為何？證明你的答案。

解：(1) 因對於所有的正整數 m,n 恆滿足$\dfrac{23}{41}<\dfrac{23m+32n}{41m+57n}<\dfrac{32}{57}$，反之，

設$\dfrac{a}{b}$滿足$\dfrac{23}{41}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{32}{57}$，取m=41a-23b，n=32b-57a，則m,n均為正整數，且 32m+23n=32×41a-23×51a=a，57m+41n=－57×23b＋41×32b=b，

即 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{23m+32n}{41m+57n}$

(2) 取 m＝1，n=1 時$\dfrac{b}{a}=\dfrac{23+32}{41+57}=\dfrac{55}{98}$為最簡分數且分母最小。

【問題三】

設a_n, b_n均為等差數列，前 n 項之和分別為A_n, B_n，如果對於每個 n 均有

$\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{3n-3}{2n+3}$，試求 $\dfrac{a_{16}}{b_{16}}$之值為何？

解：(1) 設$a_n=a_1+(n-1)d, b_n=b_1+(n-1)e$，則

$$\frac{3n-3}{2n+3}=\frac{A_n}{B_n}=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{n[2b_1+(n-1)e]}=\frac{dn+2a_1-d}{en+2b_1-e}, \forall n$$

故知 d=3r，e=2r

(2) 將 n=1 代入得 $\dfrac{0}{5}=\dfrac{A_1}{B_1}=\dfrac{a_1}{b_1}\Rightarrow a_1=0$

將 n=2 代入得 $\dfrac{3}{7}=\dfrac{A_2}{B_2}=\dfrac{a_1+a_2}{b_1+b_2}=\dfrac{3r}{b_1+(b_1+2r)}\Rightarrow b_1=\dfrac{5r}{2}$

(3) 因此$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a_1+(n-1)d}{b_1+(n-1)e}=\dfrac{0+(n-1)3r}{\dfrac{5r}{2}+(n-1)2r}=\dfrac{6(n-1)r}{5r+4(n-1)r}=\dfrac{6n-6}{4n+1}$

因而$\dfrac{a_{16}}{b_{16}}=\dfrac{6\times16-6}{4\times16+1}=\dfrac{90}{65}=\dfrac{18}{13}$