# 九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
## 南區　（高雄中學）　筆試(一)【參考解答】

1. $\because\ b^2=a^2+c^2$ 且判別式 $b^2-4ac\le 0$，又已知 $\tan A=\dfrac{a}{c}$

$\therefore\ 2-\sqrt{3}\le\tan A\le 2+\sqrt{3}$，解得 $15^\circ\le A\le 75^\circ$

2. 設圓方程式 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

$\because$ 過 $A(0,3)$，$B(12,-6)$ 兩點，得方程式

$$x^2+y^2+Dx+\left(\frac{4}{3}D+19\right)y-(4D+66)=0$$

令 $y=0$ 代入上式，$x^2+Dx-(4D+66)=0$ 的兩根分別是 $P,Q$ 兩點的 $x$ 座標

$\therefore\ \overline{PQ}^2=(D+8)^2+200$

$\because\ D=-8$，　$\therefore$ 圓心 $\left(4,-\dfrac{25}{6}\right)$

解得：(a) $\sqrt{200}$ ；　(b) $\left(4,-\dfrac{25}{6}\right)$

3. 設走一趟迷宮平均為 $x$ 分鐘，則

$$x=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}+\frac{5}{3}+\frac{x}{6}+\frac{8}{3}\ \Rightarrow\ x=12\text{（分鐘）}$$

4. $x^n=x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+x^{n-4}$

根據數學歸納法即可得證。

5. (1) $\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)=1$

(2) $\frac{1}{2}=\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$ ，得 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$，所以

$\theta=-\tan^{-1}\frac{1}{3}$。

(3) 先利用數學歸納法證明

$$\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\ldots+\tan^{-1}\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\frac{1}{n+1}$$

（由(1)(2) 觀察得到），

所以答案是$\frac{\pi}{4}$。