

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
中區 (嘉義高中) 筆試(二)【參考解答】

一、【解答】

$$\begin{aligned} & 2 \left[1 + \binom{7}{1} + \binom{8}{2} + \binom{9}{3} + \binom{10}{4} + \binom{11}{5} + \binom{12}{6} \right] \\ &= 2 \binom{13}{6} \end{aligned}$$

二、【解答】

$$\begin{aligned} \frac{2 \times C_4^8}{C_5^{10}} &= 2 \frac{5(10-5)}{10(10-1)} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

三、【解答】

若方程組有解 $x_1, \dots, x_n$, $x_n \geq 0$

$$\text{則 } \frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \cdots x_n}}$$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq n$$

$$\text{又 } \frac{9}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

$$\text{故 } \frac{9}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq n$$

$$3 \geq n$$

$n=1$ 時, 方程明顯無解

$$n=2 \text{ 時, 方程為 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + x_2 = x_1 x_2 \end{cases},$$

故 x_1, x_2 為 $t^2 - 9t + 9 = 0$ 之根, 且它的根

$$\frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 9}}{2} > 0.$$

$n=3$ 時, $x_1 = x_2 = x_3 = 3$ 為一解。故所求 n 為 2 及 3。

四、【解答】

分析：設 k 為任意實數，求為使方程

$$\frac{ax^2+x+1}{x^2+x+a}=k$$

有實根的條件。

設 k 是任意實數，令

$$\frac{ax^2+x+1}{x^2+x+a}=k \quad (1)$$

為使(1)的左邊取一切實數值，其充要條件是(1)有實根且該實根不滿足 $x^2+x+a=0$ 。由(1)得

$$(k-a)x^2+(k-1)x+ak-1=0 \quad (2)$$

(A) $k-a \neq 0$ 的情形。(2)是 x 的二次方程，所以(2)有實根的條件是判別式

$$=(k-1)^2-4(k-1)(ak-1) \geq 0$$

$$(1-4a)k^2+2(1+2a^2)k+1-4a \geq 0 \quad (3)$$

(i) $1-4a \neq 0$ 時。為使(3)對任意實數 k 成立，則

$$D=4(1+2a^2)^2-4(1-4a)^2 \leq 0 \quad (4)$$

且

$$1-4a > 0 \quad (5)$$

由(4)得

$$a(a+2)(a-1)^2 \leq 0 \quad (6)$$

由(5)得

$$a < \frac{1}{4} \quad (7)$$

使(6),(7)同時成立的 a 值的範圍是

$$-2 \leq a \leq 0 \quad (8)$$

(ii) $1-4a=0$ 時。由(3)得 $\frac{9}{4}k \geq 0$ ，就不能對任意的實數 k 成立。因而

$$1-4a \neq 0$$

(B) $k-a=0$ 的情形。由(2)得

$$(a-1)x+a^2-1=0$$

為使這個方程式有實根，只須 $a \neq 1$ 。

(C) 若 $x^2 + x + a = 0$ 之根 $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$ 滿足方程(2)

$$\text{則 } (k-a)\alpha^2 + (k-1)\alpha + ak - 1 = 0$$

$$(k-a)(-\alpha-a) + (k-1)\alpha + ak - 1 = 0$$

$$(a-1)\alpha + a^2 - 1 = 0$$

$$\text{因 } a \neq 1, \alpha + a + 1 = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} = -a - 1$$

$$\pm \sqrt{1-4a} = -2a - 1$$

$$1 - 4a = 4a^2 + 1 + 4a$$

$$\therefore a = 0 \text{ 或 } -2.$$

因此，所求的 a 值的範圍是

$$-2 < a < 0.$$