九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
中區　（嘉義高中）　　筆試(一)【参考解答】

一、【解答】

如果$n \ge 10^4$，則存在$m \ge 4$使得$10^m \le n < 10^{m+1}$。那麼

$$f(n) \le (m+1)9^3 < 9^m + \binom{m}{1}9^{m-1} < \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}9^{m-j} = (9+1)^m \le n 。$$

這證明了如果$n_k \ge 10^4$則$n_{k+1} < n_k$.

再則，如果$n < 10^4$則

$$f(n) \le 4 \times 9^3 < \sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}9^{4-j} = 10^4.$$

所以n_k最終小於10^4且之後永遠小於10^4。

二、【解答】

令F為S的圓心，G為BC的中點，H為AC的中點，M為AC到F最近的點，T為S和Z的切點。再令$a=\overline{AB}/2$、$b=\overline{BC}/2$、$r=\overline{DF}$、$y=\overline{FM}$、$w=\overline{DE}$，我們需要證明$w=2a$。

首先注意到$\overline{BM}=r$, $\overline{MH}=|b-a-r|$, $\overline{FG}=b+r$, $\overline{FH}=a+b-r$。因為ΔMGF和ΔMHF是直角三角形，所以$(b+r)^2=y^2+(b-r)^2$且$(a+b-r)^2=y^2+(b-a-r)^2$。因此 $r=\dfrac{ab}{a+b}$。

因為ΔMGF和ΔBGE是相似，所以$\dfrac{GF}{MG}=\dfrac{GE}{BG}$，因此 $\dfrac{b+r}{b-r}=\dfrac{b+w}{b}$。將上述r 代入方程式後，我們得到 $w=2a$。

三、【解答】

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}=\left(x^2+3y^2\right)\left(3x^2+y^2\right) \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=2\left(y^4-x^4\right) \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

①+②：$\dfrac{2}{x}=x^4+10x^2y^2+5y^4 \cdots\cdots\cdots\cdots ③$

①-②：$\dfrac{1}{y}=5x^4+10x^2y^2+y^4 \cdots\cdots\cdots\cdots ④$

③×x 及④×y 得

$$x^5+10x^3y^2+5xy^4=2 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$5x^4y+10x^2y^3+y^5=1 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤+⑥及⑤-⑥得

$$(x+y)^5=3 \text{ 及 } (x-y)^5=1$$

$$\therefore\ x=\frac{3^{\frac{1}{5}}+1}{2},\ y=\frac{3^{\frac{1}{5}}-1}{2}.$$

四、【解答】

考慮複平面上的一個半徑為 r 的圓，

我們可將 $A_1,A_2,\cdots,A_{2k+1}$ 的座標看作 $z^{2k+1}=r^{2k+1}$ 的解，並令 A_1 的座標為 $(r,0)$，則 P 的座標為 $(a+r,0)$。

由對稱性知 $\overline{PA_2}=\overline{PA_{2k+1}},\overline{PA_3}=\overline{PA_{2k}},\cdots,\overline{PA_{k+1}}=\overline{PA_{k+2}}$.

我們用極座標來表示 $z^{2k+1}=r^{2k+1}$ 的根為 $w_1,w_2,\cdots,w_{2k+1}$。

因為 $P=(a+r)+0i=\dfrac{(a+r)}{r}\cdot r$，令 $w_j=\left(\cos\dfrac{2\pi j}{2k+1}+i\sin\dfrac{2\pi j}{2k+1}\right)r$

則 $\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\cdots\overline{PA_{2k+1}}=\displaystyle\prod_{j=1}^{2k+1}\left|r\left(\frac{a+r}{r}\right)-r\left(\cos\frac{2\pi j}{2k+1}+i\sin\frac{2\pi j}{2k+1}\right)\right|$

$$=r^{2k+1}\left|\prod_{j=1}^{2k+1}\left[\frac{(a+r)}{r}-\frac{w_j}{r}\right]\right|$$

$$=r^{2k+1}\left|\left(\frac{a+r}{r}\right)^{2k+1}-1\right|=(a+r)^{2k+1}-r^{2k+1}$$

$\overline{PA_1}=a$，且 $\overline{PA_1}\times\overline{PA_2}\times\cdots\times\overline{PA_{2k+1}}=\overline{PA_1}\times\left(\displaystyle\prod_{j=2}^{k+1}\overline{PA_j}\right)^2=a\times\left(\displaystyle\prod_{j=2}^{k+1}\overline{PA_j}\right)^2$

$$\therefore\ \prod_{j=1}^{k+1}\overline{PA_j}=a\times\sqrt{\frac{1}{a}\overline{PA_1}\times\cdots\times\overline{PA_{2k+1}}}$$

$$=\sqrt{a\left[(a+r)^{2k+1}-r^{2k+1}\right]}$$