

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
中區 (嘉義高中) 筆試(一)試題

編號：

(學生自填)

(時間二小時)

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為四十九分。
2. 不可使用計算器。
3. 請將答案寫在答案欄內。
4. 計算紙必須連同試卷交回。

- 一、對於自然數 n ，定義 $f(n)$ 為 n 的各個位數三次方的和，例如： $f(172) = 1^3 + 7^3 + 2^3$
(12 分) 首先任意給定一個自然數 n_0 ，然後令 $n_k = f(n_{k-1})$ ， $k \geq 1$ 。試證明：對於所有足夠大的自然數 k ，我們有 $n_k \leq 9999$ 。

- 二、 B 為 $\overline{AC}$ 上任一點，分別以 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 為直徑在同一側畫半圓 X 、 Y 、 Z 。過 B 點
(12 分) 畫直線 $L \perp \overline{AC}$ 。令圓 S 為位於 L 、 Y 和 Z 之間的最大圓。令 S 和 Y 的切點為 D 。 S 上過 D 點的直徑延長線交 L 於 E 。試證 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 。

- 三、請找出下列方程組的所有實數的解 (x, y) ：
(13 分)

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = (x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = 2(y^4 - x^4) \end{cases}$$

- 四、某圓之圓心為 O ， P 為圓外一點， $A_1 A_2 \cdots A_{2k+1}$ ($k \geq 1$) 為圓內接正多邊形， P 、 A_1 、
(12 分) O 在同一線上，且 $\overline{PA_1} = a$ 、 $\overline{OA_1} = r$ 。求 $\overline{PA_1} \times \overline{PA_2} \times \cdots \times \overline{PA_{k+1}}$ (以 a 、 r 及 k 表示)。