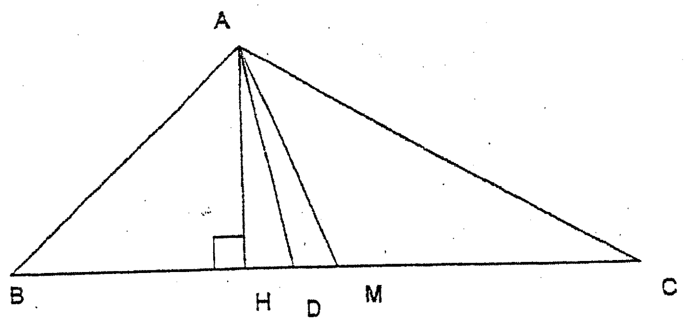
九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區　（屏東中學）　　筆試(一)【參考解答】

參考解答

1. 由條件可知道$\overline{AB} \neq \overline{AC}$，可設$\overline{AB} < \overline{AC}$，圖形如下



設 $\angle BAC = 90°$，則$\Delta ABH \sim \Delta CAH$

$\Longrightarrow \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{AH}} \xrightarrow{\text{設}} r$

所以 $\overline{CH} = 24r, \overline{BH} = 24/r$

且$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$(角平分線)

則$1 : r = (\dfrac{24}{r} + 7) : (24r - 7)$ 可得 $r = \dfrac{31}{17}$

所以 $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} = \dfrac{24 \times 1250}{31 \times 17} = \dfrac{30000}{527}$

當$\angle BAC = 90°$，$\overline{AM} = x = \dfrac{1}{2}\overline{BC} = \dfrac{15000}{527}$

故 (a) 若 $25 < x < \dfrac{15000}{527}$，則$\angle BAC$ 為銳角

(b) 若$x > \dfrac{15000}{527}$ $\angle BAC$ 鈍角

2.

$$\left[\left(\sqrt{\frac{1}{1+2a_1a_2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{1+2a_1a_2}}\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{\frac{1}{1+2a_{2004}a_1}}\right)^2\right]\cdot\left[(1+2a_1a_2)+\ldots.+(1+2a_{2004}a1)\right]$$

$$\geq(1+1+\ldots+1)^2=2004^2$$

原式 =

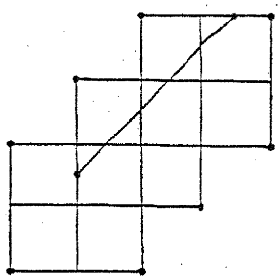
$$\frac{1}{1+2a_1a_2}+\frac{1}{1+2a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{1+2a_{2004}a_1}\geq\frac{2004^2}{1+2a_1a_2+1+2a_2a_3+\ldots+1+2a_{2004}a_1}$$

$$=\frac{2004^2}{2004+2(a_1a_2+\ldots+a_{2004}a_1)}$$

因為 $a_i^2+a_{i+1}^2\geq2\sqrt{a_i^2a_{i+1}^2}=2a_ia_{i+1}$

所以 原式 $\geqq\dfrac{2004^2}{2004+2(a_1^2+a_2^2+\ldots a_{2004}^2)}=\dfrac{2004^2}{2004+4008}=668$

3. (a) 以第一個 2╳2 棋盤為準，可切割 3 格　(如圖示)
每向左下延伸 1 格可多切割 2 格
所以共可以切割　3+2╳8=19 格



(b) 以 2╳2 棋盤為例，可以切割 3 格，每向下延伸一格可多切割一格，每向左延伸一格可多切割一格
故 m╳n 的棋盤 共向下延伸 (n-2)格 ，
向左延伸 (m-2)格
所以可切割 3+(m-2)+(n-2)=m+n-1 格

4. (1) $n=1$， $1|m$ ，對任意的正整數 m 都成立

(2) $n=2$， 則 m 及 $m+1$ 必有一個偶數，則 $2!\,|\,m(m+1)$

(3) 設 $k-1$ 個連續正整數的乘積為 $(k-1)!$之個倍數

(4) 令 $g(m)=m(m+1)\ldots.(m+k-1)$

$g(m+1)=(m+1)(m+2)\ldots.(m+k-1)(m+k)$

$mg(m+1)=(m+k)g(m)= mg(m)+kg(m)$

$m[g(m+1)-g(m)]= kg(m)$

$g(m+1)-g(m)=kg(m)/m= k(m+1)(m+2)\ldots.(m+k-1)$

由(3)可知 $(k-1)!\,|\,(m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)$

故 $k!\,|\,[g(m+1)-g(m)]$

若將 m 以 $m-1$，$m-2$，…，1 取代，上式仍成立

$\Longrightarrow g(m)=[g(m)-g(m-1)]+[g(m-1)-g(m-2)]+\ldots+[g(1)-g(0)]$

$\Longrightarrow k!\,|\,g(m)$

由數學歸納法得知，任意 n 個連續整數乘積為 n!的倍數。