

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

(台中一中)

編號：_____

注意事項：

- (1) 時間分配：1 小時。
- (2) 本試卷共四題，二題填充題，二題計算證明題，滿分為 21 分，第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 6 分，第四題 5 分。
- (3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 不可使用電算器。
- (5) 試題與答案卷一同繳回。

填充題

1. 若 $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ ，求 $a+b+c =$ _____。
2. 若 $0 < u < \sqrt{2}$ 及 $v > 0$ ，則 $(u-v)^2 + \left(\sqrt{2-u^2} - \frac{9}{v}\right)^2$ 之最小值 = _____。

計算證明題

3. 設 S 是一集合，且 $\circ$ 是定義於 S 上並具封閉性的運算：即若 $x, y \in S$ ，則 $x \circ y \in S$ 。現在若對任意 $x, y, z \in S$ ，有 $x \circ x = x$ 且 $(x \circ y) \circ z = (y \circ z) \circ x$ 。求證：
 - (a) 對所有 $x, y \in S$ ， $x \circ y \in y \circ x$ 。
 - (b) 對所有 $x, y, z \in S$ ， $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ 。
4. 令 n 是自然數， $T(n)$ 表示以 n 根牙籤圍出的三角形個數。試證：
 - (a) 當 n 是偶數時，不可能有邊長 1 且周長為 n 的三角形。
 - (b) 當 $n > 3$ 時， $T(2n) < T(2n-1)$ 。