九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

(台中一中)

[問題一]：設函數F之定義域為$\mathbb{R}$上除了$x=0$及$x=1$。求滿足下列條件之$F(x)$：

$$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x\text{。}$$

【參考解答】：已知

$$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots..(1)$$

用$\dfrac{x-1}{x}$代x，得

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(\frac{-1}{x-1}\right)=\frac{2x-1}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

於(1)中用$\dfrac{-1}{x-1}$代x，得

$$F\left(\frac{-1}{x-1}\right)+F(x)=\frac{x-2}{x-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

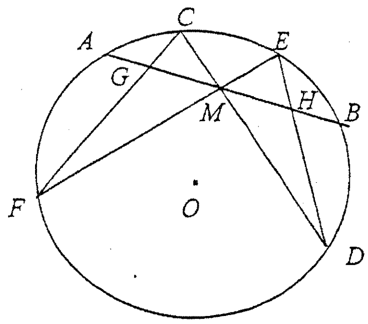
(1)+(3)-(2)

$$2f(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}=\frac{x^3-x^2-1}{x(x-1)}$$

所以

$$F(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}.$$

[問題二]：已知O為圓心，M為弦$\overline{AB}$之中點，過M作兩弦$\overline{CD}$與$\overline{EF}$；連接$\overline{CF},\overline{DE}$分別交$\overline{AB}$於$G,H$，求證$\overline{MG}=\overline{MH}$。



【參考解答】：$\Delta MDE = \Delta MDH + \Delta MHE$

$$\frac{1}{2}\overline{MD}\cdot\overline{ME}\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{2}\overline{MD}\cdot\overline{MD}\sin\beta+\frac{1}{2}\overline{ME}\cdot\overline{ME}\sin\alpha$$

在此 $\alpha = \angle EMH, \beta = \angle DMH$

除以 $\overline{MD}\cdot\overline{ME}\cdot\overline{MH}$ 得

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\overline{MH}}=\frac{\sin\beta}{\overline{ME}}+\frac{\sin\alpha}{\overline{MD}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\overline{MG}}=\frac{\sin\beta}{\overline{MF}}+\frac{\sin\alpha}{\overline{MC}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

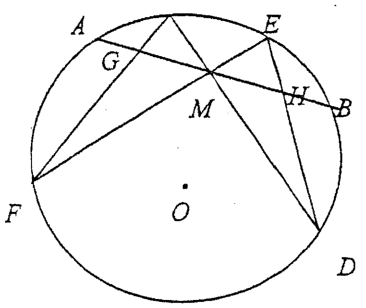
(1)-(2)得 $\sin(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\overline{MH}}-\frac{1}{\overline{MG}}\right)$

$$=\frac{\sin\beta}{\overline{ME}\cdot\overline{MF}}\left(\overline{MF}-\overline{ME}\right)-\frac{\sin\alpha}{\overline{MC}\cdot\overline{MD}}\left(\overline{MD}-\overline{MC}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

設 P,Q 分別爲 $\overline{DC},\overline{EF}$ 中點

$$\left.\begin{array}{l}\overline{MF}-\overline{ME}=2\overline{MQ}=2\overline{MO}\sin\alpha\\ \overline{MD}-\overline{MC}=2\overline{MF}=2\overline{MO}\sin\beta\end{array}\right.\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4)代入(3)及 $\overline{ME}=\overline{MF}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}$，(3)式右邊爲 $O \Rightarrow \overline{MH}=\overline{MG}$



[問題三]：證明對於任意自然數 n，存在一個自然數 k 使得 $\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}$。

【參考解答】：因 $\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^n$，只要證明 $\forall\ n\in N$，$\exists\ k\in N$，使得

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}$$

(1)證明給定奇正整數 n，存在 $b\in k$，$\left(\sqrt{2}+1\right)^n=b\sqrt{2}+m$，其中

$m=\sqrt{2b^2-1}\in N$

歸納法：$n=1$ 成立，假設 $n=2\ell+1$ 成立，則存在 $b,m\in N$

使得 $\left(\sqrt{2}+1\right)^n=b\sqrt{2}+m$，則

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{n+2}=\left(b\sqrt{2}+m\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

$$=(3b+2m)\sqrt{2}+3m+4b$$

檢查　$3m+4b$ 是否是 $\sqrt{2(3b+2m)^2-1}$?

因　$2(3b+2m)^2-1=18b^2+24mb+8m^2-1$

且　$m^2=2b^2-1$

所以　$18b^2+24mb+8m^2-1=16b^2+m^2+1+24mb+8m^2-1$

$$=(3m+4b)^2$$

由歸納假設 $\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\sqrt{k}\cdot\sqrt{k-1}$ 成立對奇自然數 n。

(2)假如 n 爲偶數，則 $n=2\ell$，$\ell\in N$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^n=\left(\sqrt{2}+1\right)^\ell=\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2 \qquad \text{for some} \quad k\in N$$

$$=2k-1+\sqrt[2]{k^2-k}$$

$$=\sqrt{(2k-1)^2}+\sqrt{4k^2-4k} \qquad 成立$$

［問題四］：令 Q^+ 表正有理數集，N 表自然數集，定義 $f:N\to Q^+$ 如下：

$$f(1)=1,\ \ f(2n)=f(n)+1,\ \ f(2n+1)=\frac{1}{f(2n)}\ 。$$

(1)求證若 $f(x)=f(y)$ 則 $x=y$。

(2)求證對任意 $q\in Q^+$ 必存在一個自然數 n，使得 $f(n)=q$。

【參考解答】:

(1) By math. Ind.

Assume $f(1), f(2), \cdots, f(n-1)$ and all diff.

If $f(n) = f(k)$ for some $k < n$

n is odd $\Rightarrow$ $f(n-1) = f(k-1) \Rightarrow f(1), \cdots, f(n-1)$ are not all diff.

$(\rightarrow\leftarrow)$

n is new $\Rightarrow$ k is even $\quad \because f(x) > 1$ only for x even

$\Rightarrow f\left(\frac{k}{2}\right) = f\left(\frac{n}{2}\right)$ $\rightarrow\leftarrow$ (all diff.)

(2) Let $x = \frac{a}{b}$ $(a,b) = 1$. Define $S(x) = a + b$

$\Rightarrow$ "All rational x with $S(x) \le 2$ are in the image of f" is True.

Assume, rational x with $S(x) \le n-1$ are in the image of f" is True.

Now, $y \in Q$ $\quad S(y) = n$

① if $y > 1$ then $a > b$, Take $z = y - 1 = \frac{a-b}{b} \Rightarrow S(z) = a - b + b < S(y) = n$

By hypoh. $z \in R(f)$, $z \in f(k)$. Then $f(2k) = z + 1 = y$.

② if $y > 1$, slimily $\frac{1}{y} > 1$, $\frac{1}{y} > R(f)$

$f(k) = \frac{1}{y}$ then $f(k+1) = y$.

$\therefore$ onto.