

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

(台中一中)

編號：_____

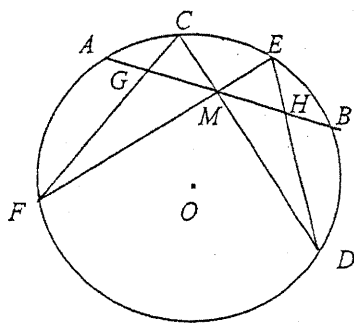
注意事項：

- (1)時間分配：2 小時。
- (2)配分：滿分 49 分，第一題 12 分，第二題 13 分，第三題 12 分，第四題 12 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：設函數 F 之定義域為 $\mathbb{R}$ 上除了 $x=0$ 及 $x=1$ 。求滿足下列條件之 $F(x)$ ：

$$F(x) + F\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1+x。$$

[問題二]：已知 O 為圓心， M 為弦 $\overline{AB}$ 之中點，過 M 作兩弦 $\overline{CD}$ 與 $\overline{EF}$ ；連接 $\overline{CF}$, $\overline{DE}$ 分別交 $\overline{AB}$ 於 G, H ，求證 $\overline{MG} = \overline{MH}$ 。



[問題三]：證明對於任意自然數 n ，存在一個自然數 k 使得 $(\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$ 。

[問題四]：令 $\mathbb{Q}^+$ 表正有理數集， $\mathbb{N}$ 表自然數集，定義 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ 如下：

$$f(1)=1, \quad f(2n)=f(n)+1, \quad f(2n+1)=\frac{1}{f(2n)}。$$

- (a) 求證若 $f(x)=f(y)$ 則 $x=y$ 。
- (b) 求證對任意 $q \in \mathbb{Q}^+$ 必存在一個自然數 n ，使得 $f(n)=q$ 。