九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

北區 第三區(建國中學)

[問題一]：已知一元二次方程式$ax^2-2bx+2c=0$有兩個相異實根都介於 2 與 3 之間，又$a>0$。試證下述兩個不等式成立：

(1) $b<c<\dfrac{3}{2}a+b$。

(2) $\dfrac{3a}{4a+2c}+\dfrac{b}{2a+b}>\dfrac{c}{b+c}$。

【參考解答】：

(1) 設$ax^2-2bx+2c=0$的兩個實根爲x_1與x_2。依假設，$2<x_1<3$，$2<x_2<3$。依根與係數的關係，可得

$$x_1+x_2=\frac{2b}{a}，x_1x_2=\frac{2c}{a}。$$

因爲$2<x_1<3,2<x_2<3$且$a>0$，所以，得

$$c-b=\frac{a}{2}(x_1x_2-x_1-x_2)=\frac{a}{2}[(x_1-1)(x_2-1)-1]>\frac{a}{2}(1\times1-1)=0；$$
$$\frac{3a}{2}+b-c=\frac{a}{2}(3+x_1+x_2-x_1x_2)=\frac{a}{2}[4-(x_1-1)(x_2-1)]>\frac{a}{2}(4-2\times2)=0。$$

由此可得

$$b<c<\frac{3}{2}a+b。$$

(2) 因爲$x_1>2,x_2>2$且$a>0$，所以，得$b>2a$。因爲$c>b$，所以，進一步得$c>2a$。於是，可得

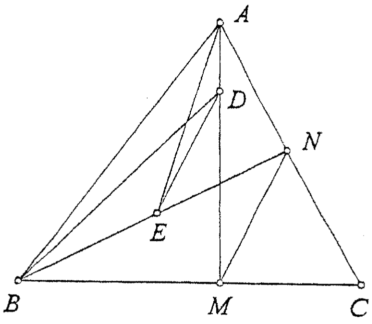
$$\frac{3a}{4a+2c}+\frac{b}{2a+b}>\frac{3a}{2b+2c}+\frac{b}{c+b}=\frac{\frac{3}{2}a+b}{b+c}>\frac{c}{b+c}。\quad\|$$

[問題二]：給定一銳角三角形△ABC，其中$\angle A>45^\circ$、$\angle B>45^\circ$。設$\overline{AM}$與$\overline{BN}$分別表示△ABC 過頂點 A 與 B 的高，而 D 與 E 分別爲射線$\overrightarrow{MA}$與$\overrightarrow{NB}$上滿足$\overline{MD}=\overline{MB}$與$\overline{NE}=\overline{NA}$的兩點。試證：$\overline{DE}$與$\overline{MN}$平行。

【參考解答】：因爲$\angle A>45^\circ$、$\angle B>45^\circ$，所以點D與E都在△ABC內部。

因爲$\angle AMB = \angle ANB = 90^{\circ}$，所以$A$、$B$、$M$與$N$共圓。於是，得

$$\angle MAN = \angle MBN \text{，} \quad \angle ABN = \angle AMN \text{。}$$



其次，因爲

$$\angle DAE = \angle NAE - \angle NAD = \angle 45^{\circ} - \angle MAN$$
$$= \angle 45^{\circ} - \angle MBN = \angle MBD - \angle MBE = \angle DBE \text{，}$$

所以A、B、E與D共圓。於是，得$\angle EDM = \angle ABE$。進一步得

$$\angle EDM = \angle ABE = \angle ABN = \angle AMN = \angle DMN \text{。}$$

由此可知$\overline{DE}$與$\overline{MN}$平行。 ∥

［問題三］：試求出能使$n^4 + 4^n$爲質數的所有正整數n。

【參考解答】：當$n = 1$時，$n^4 + 4^n = 5$爲質數 。

當n爲偶數時，設$n = 2k$，其中$k \in N$，則

$$n^4 + 4^n = 16k^4 + 4^{2k} = 16(k^4 + 16^{k-1}) \text{。}$$

此整數必是 16 的倍數，它不是質數。

當n爲比 1 大的奇數時，設$n = 2k+1$，其中$k \in N$，則

$$n^4 + 4^n = (2k+1)^4 + 4^{2k+1} = (2k+1)^4 + (2^{2k+1})^2$$
$$= [(2k+1)^2 + 2^{2k+1}]^2 - 2 \cdot 2^{2k+1}(2k+1)^2$$
$$= [(2k+1)^2 + 2^{2k+1}]^2 - [2^{k+1}(2k+1)]^2$$
$$= [(2k+1)^2 + 2^{2k+1} + 2^{k+1}(2k+1)] \times [(2k+1)^2 + 2^{2k+1} - 2^{k+1}(2k+1)] \text{。}$$

上式右端第一個因數顯然恆大於 1，只要證明第二個因數也恆大於 1，即可知$n^4 + 4^n$不是質數。依算幾不等式可知

$$(2k+1)^2 + 2^{2k+1} - 2^{k+1}(2k+1) \geq 2\sqrt{(2k+1)^2 \times 2^{2k+1}} - 2^{k+1}(2k+1)$$
$$\geq 2^{k+1}(2k+1)\sqrt{2} - 2^{k+1}(2k+1)$$

$$=2^{k+1}(2k+1)(\sqrt{2}-1)$$
$$\geq 4\cdot 3\cdot 0.4$$
$$\geq 4 \text{。} \quad \|$$

[問題四]：有多少個多項式 $f(x)=x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ 同時滿足下面兩個條件？

(1) a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7 是集合 $\{1,2,3,\cdots,10\}$ 中的七個相異元素；

(2) $f(x)$ 可被 x^3+x^2+x+1 整除。

【參考解答】：將 $f(x)$ 除以 x^3+x^2+x+1，可得

$$f(x)=(x^3+x^2+x+1)[x^4+(a_1-1)x^3+(a_2-a_1)x^2+(a_3-a_2)x+(a_4-a_3+1)]$$
$$+(a_5-a_4+a_1-1)x^2+(a_6-a_4+a_2-1)x+(a_7-a_4+a_3-1) \text{。}$$

因為 $f(x)$ 被 x^3+x^2+x+1 整除，所以，可得

$$1+a_4=a_1+a_5=a_2+a_6=a_3+a_7 \text{。}$$

根據上述等式，我們必須從 $\{1,2,3,\cdots,10\}$ 中選出七個相異數，連同 1 共八個數，平分成四組，每一組的兩個數之和都相等，設和等於 k。因為七個數相異，所以，a_1，a_2，a_3，a_5，a_6，a_7 等六個數都不等於 1。(例如：若 $a_1=1$，則 $a_4=a_5$。)

a_4 也不等於 1，否則 $1+a_4$ 比其他三組的和都小。由此可知：從 $\{1,2,3,\cdots,10\}$ 中選出的七個相異數不能含 1，因此其中的最大數至少為 8，四組的共同和至少等於 9，亦即：$k=9$、10 或 11。

(i) 當 $k=9$ 時，$a_4=8$，而且另外三組數分別為 $\{2,7\}$，$\{3,6\}$ 與 $\{4,5\}$。其分配方法數共有 $6\times4\times2=48$ 種。(a_1 有 6 種選擇，a_2 有 4 種選擇，a_3 有 2 種選擇。)

(ii) 當 $k=10$ 時，$a_4=9$，而且另外三組數分別為 $\{2,8\}$，$\{3,7\}$ 與 $\{4,6\}$。其分配方法數共有 $6\times4\times2=48$ 種。(a_1 有 6 種選擇，a_2 有 4 種選擇，a_3 有 2 種選擇。)

(iii) 當 $k=11$ 時，$a_4=10$，而且另外三組數分別為 $\{2,9\}$，$\{3,8\}$，$\{4,7\}$ 與 $\{5,6\}$ 中的三組。其分配方法數共有 $8\times6\times4=192$ 種。(a_1 有 8 種選擇，a_2 有 6 種選擇，a_3 有 4 種選擇。)

因此，所求的多項式 $f(x)=x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$

共有 $48+48+192=288$ 個。 ‖