九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

（台南一中）

[問題一]：投擲一枚公正的錢幣 2n 次，證明出現正面的次數至少為 n 次的機率為

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\binom{2n}{n}$$

【參考解答】：$P\{\text{at least n heads}\}=\sum_{k=n}^{2n}\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}=\sum_{k=n}^{2n}\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\sum_{k=n}^{2n}\binom{2n}{2n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{2}\left(\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

[問題二]：請問對於所有的實數 x，$\sin(\cos x),\cos(\sin x)$ 哪一個大？(請詳細證明)

【參考解答】：

$$-1\le\sin x\le 1\quad\forall x\ \ \text{implies}\ \cos(\sin x)>0\quad\forall x$$

So $\quad\cos(\sin x)>0\ge\sin(\cos x)\quad\forall x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]\qquad(1)$

If $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ then $|\sin x|<|x|$ and

$$\cos(\sin x)=\cos|\sin x|>\cos|x|\ge\sin|\cos x|\ge\sin(\cos x)\qquad(2)$$

cos(sin0)=cos0=1>sin1=sin(cos0).Put this together with(1)and(2)one gets

$$\cos(\sin x)>\sin(\cos x)\quad\forall x$$

[問題三]：設 p(x)為整係數多項式，且滿足 $p(m_1)=p(m_2)=p(m_3)=p(m_4)=13$。這裡 m_1，m_2，m_3，m_4 是給定相異整數。證明沒有整數 m，使 p(m)=20。

【參考解答】：Let $p(x)=(x-m_1)(x-m_2)(x-m_3)(x-m_4)Q(x)+13$. If $m\in\mathbf{Z}$ s.t. $p(m)=20$ then $Q(m)\in\mathbf{Z}$ and

$$(m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)(m-m_4)Q(m)+13=20$$
$$(m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)(m-m_4)Q(m)=7$$

$m_i, i=1,2,3,4$ are all different so integers $m-m_i, i=1,2,3,4$ are all different and at least two of them have absolute values other than 1，their product can be divisor of 7.

［問題四］：設 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=2$ 且對任一正整數 n 都有 $f(3n)=f(n)$，$f(3n+1)=f(n)+1$，$f(3n+2)=f(n)-1$，試求 $f(3721)$之值。

【參考解答】：

$$\begin{aligned}f(3721)&=f(3\cdot 1240+1)=f(1240)+1=f(3\cdot 413+1)+1=f(413)+1+1\\&=f(3\cdot 137+2)+2=f(137)-1+2=f(3\cdot 45+2)+1\\&=f(45)-1+1=f(3\cdot 15)=f(15)=f(3\cdot 5)=f(5)=f(3\cdot 1+2)\\&=f(1)-1=1-1\\&=0\end{aligned}$$