九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

北區 第四區(新竹高中)

[問題一]：在坐標平面上給定一點 $A(2,5)$，試在直線 $y=x$ 上找一點 P，使得 $\overline{AP}-\overline{PQ}$ 為最小，其中 Q 為 P 在直線 $2x-5y=0$ 上的垂足。請求出 P 點的坐標，並證明之。

【參考解答】：令 A' 爲 $A(2,5)$ 對直線 $y=x$ 的對稱點，即 $A'=(5,2)$ ，則在直線 $y=x$ 上任意一點 P，恆有 $\overline{AP}=\overline{A'P}$，且 A' 恰好在直線 $2x-5y=0$ 上。若 Q 爲 P 在直線 $2x-5y=0$ 上的垂足，則 $\overline{AP}-\overline{PQ}=\overline{A'P}-\overline{PQ}=\overline{A'P}-\overline{PQ}\geqq 0$.

因此，使得 $\overline{AP}-\overline{PQ}=0$ 爲最小，此即 $A'=Q$。故 P 點爲直線 $5x+2y=29$ 與直線 $y=x$ 的交點。因此，可得P的坐標爲 $(\frac{29}{7},\frac{29}{7})$。

[問題二]：試求出所有的正整數 a、b，使得 $\frac{a^2+b}{ab+1}$ 為正整數。

【參考解答】：我們將證明所求的解爲 $(1,k),(k,k+1),(k^2,k)$，其中 k 爲任意的正整數。

注意：$\frac{a^2+b}{ab+1}\geqq 1$ 之充要條件爲 $(a-1)(a+1-b)\geqq 0$.

(i) 當 $a=1$ 時，b 可爲任意的正整數。經檢驗可知 $(a,b)=(1,k)$ 爲滿足條件的解，其中 k 爲任意的正整數。

(ii) 當 $a\geqq 2$ 時，$1\leqq b\leqq a+1$。若 $b=a+1$，則經檢驗可知 $(a,b)=(k,k+1)$ 爲滿足條件的解，其中 k 爲任意的正整數。若

$1\leqq b\leqq a$，令 $\frac{a^2+b}{ab+1}=m$，則

$a^2+b=(ab+1)m=abm+m$.

於是可得，$m\equiv b \pmod a$。故可令 $m=aq+b$，其中 q 爲一非負整數；亦即 $a^2+b=(ab+1)(aq+b)$。化簡可得 $a=abq+q+b^2$。因此，比較兩邊大小可知：$q=0$，且 $a=b^2$。經檢驗，$(a,b)=(k^2,k)$ 也是滿足條件的解，其中 k 爲任意的正整數。

[問題三]：將 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{48}$ 依順時針方向排列在一圓周上，其中 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{48}$ 為 $1,2,3,\cdots,48$ 的一種排列。設 $f(n)$ 表示圓周上從第 n 個數 a_n 開始依順時針方向連續的 16 個數中是偶數的個數。

(a) 試證：$f(1)\,f(2)\cdots f(48)\leqq 2^{144}$；

(b) 試證：必有一整數 $k\in\{1,2,3,\cdots,48\}$ 使得 $f(k)=8$.

【參考解答】：

(a) 注意：$a_1, a_2, a_3,\cdots, a_{48}$ 中有 24 個偶數，每一偶數在計算 $f(1)+f(2)+\cdots+f(48)$ 之和中各重複了 16 次，因此，

$f(1)+f(2)+\cdots+f(48)=24 \cdot 16=384$.於是，由算幾不等式，可得

$$\prod_{n=1}^{48} f(n) \le \left(\frac{1}{48}\sum_{n=1}^{48} f(n)\right)^{48}=\left(\frac{384}{48}\right)^{48}=8^{48}=2^{144}$$

(b) 若每一個 $f(k)=8$，則證畢；若有一個 $f(k)\ne 8$，則由(a)可知：必有一組 m, n 使 $f(m)<8<f(n)$。不失一般性，可設 $m<n$。注意：對每一 k，恆有 $|f(k+1)-f(k)|=0$ 或 1。故必存在一 $k\in\{m+1, m+2,\cdots, n-1\}$ 使得 $f(k)=8$。(此為整數集上離散型的中間值定理)