九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

北區 第二區(板橋高中)

【問題一】：試求滿足下列條件的所有正整數 n：

（1）n 恰有 6 個正因數：$1, d_1, d_2, d_3, d_4, n$；

（2）$1+n=5(d_1+d_2+d_3+d_4)$。（16 分）

【參考解答】：設正整數 n 滿足條件(1)、(2)且其質因數分解可表示爲 $p_n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots p_k^{\alpha_k}$ 其中 $1 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_k$ 且 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是相異質數；則它的正因數共有 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots\ldots(\alpha_k+1)$ 個。

由條件(1)，則只可能是(i) k=1 且 $\alpha_1=5$；或(ii) k=2, $\alpha_1=1$ 且 $\alpha_2=2$。

若是情況(i)，則 $n=p^5$；且由條件(2)可得 $1+p^5=5(p+p^2+p^3+p^4)=5p(1+p+p^2+p^3)$，此顯然不可能。

若是情況(ii)，則 $n=pq^2$，其中 p、q 爲相異質數。由條件(2)可得 $1+pq^2=5(p+q+pq+q^2)$；

所以，$p=5+\dfrac{30q+24}{q^2-5q-5}$ (a)

因爲 p 爲正整數，所以 $30q+24 \ge q^2-5q-5$。由此可得 $q \le 35$。滿足(a)且不大於 35 的質數 q 可使得 p 亦爲質數的只有 $q=7$，而此時對應的 $p=31$。故，$n=31 \cdot 7^2=1519$。

【問題二】：從 1 到 100 的整數中挑選相異的數形成 n 個集合，滿足下列兩個條件：

（1）任何兩個集合都沒有共同的元素；

（2）每個集合中最大元素等於其餘各元素的乘積。

試問：n 最大是多少？並寫出這 n 個集合。（需說明理由）（16 分）

【參考解答】：由於每個集合中的元素均相異，且每個集合中最大的數等於其餘各數之積，所以每個集合至少含有 3 個數，且每個集合中最小的數不大於 9，否則此集合中除了最大的數，其餘各數的積不小於 $10 \times 11 = 110 > 100$，矛盾！因而集合的個數不大於 9。若存在 9 個滿足條件(1)、(2)的集合，則它們最小的元素分別爲 $1, 2, \cdots, 9$。

考慮包含 1 的集合，則此集合至少還包含其他 3 個相異的數，所以此集合中第二小的數大於 9，因而會導致此集合中最大的數大於 100，矛盾！故，滿足條件(1)、(2)的集合至多有 8 個。

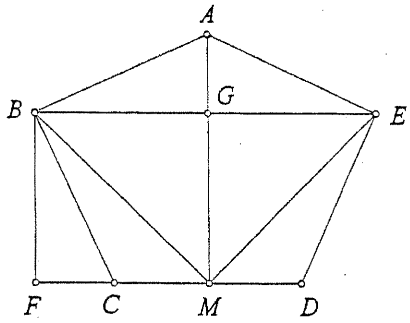
事實上，{2, 17, 34}, {3, 16, 48}, {4, 15, 60}, {5, 14, 70}, {6, 13, 78}, {7, 12, 84}, {8, 11, 88}, {9, 10, 90}爲 8 個滿足條件(1)、(2)的集合。

【問題三】：在凸五邊形 $ABCDE$ 中，若 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}$，而且 $\overline{CD}$ 的中點 M 滿足 $\angle CMB=\angle DME=45^\circ$。試求

（1）$\angle ABC$ 的度數；（9 分）

（2）$\overline{CF}:\overline{CM}$，其中 F 是 B 至直線 CD 的垂足。（8 分）

【參考解答】：



(1)在等腰三角形△CDB 中，因爲 $\angle CDB<\angle CMB=45^\circ$，所以 $\angle BCD>90^\circ$。於是，△CMB（與△DME）是鈍角三角形。依鈍角三角形的SSA 全等定理，可知△ $CMB\cong$△DME，$\overline{MB}=\overline{ME}$。於是，△$MBE$ 是直角等腰三角形，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 平行，$\overline{AM}$ 將 $\overline{BE}$ 垂直平分於G。若 B 至直線 CD 的垂足爲 F，則 $\overline{BF}=\overline{GM}=\overline{BG}$。依直角三角形的SSA 全等定理，可知△ $BCF\cong$△BAG。於是，$\angle FBC=\angle ABG$，$\angle ABC=\angle FBG=90^\circ$。

(2)因爲 $\angle BMC=45^\circ$，所以，在三角形△BMC 中引用餘弦定律，得

$$\overline{BM}^2-2\overline{BM}\cdot\overline{CM}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\overline{CM}^2=\overline{BC}^2，$$

$$\overline{BM}^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AB}\cdot\overline{BM}-\frac{3}{4}\overline{AB}^2=0，$$

$$\overline{BM}=\frac{1}{4}(\sqrt{2}\pm\sqrt{14})\,\overline{AB}\text{（應取正號）。}$$

進一步得

$$\overline{CF}=\overline{FM}-\overline{CM}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{BM}-\frac{1}{2}\overline{AB}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{4}\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{\sqrt{7}-1}{4}\overline{AB},$$

$\overline{CF}:\overline{CM}=(\sqrt{7}-1):2$。 ‖