九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

北區 第一區(花蓮高中)

【問題一】：考慮平面上一個凸多邊形區域 $P_1P_2P_3\ldots P_n(n\geq 3)$。這是一個島國，週邊是海洋。因此，其週邊長 p 就是她的海岸線全長。現在她宣稱與岸邊距離 d 的範圍之內都是她的領海。證明她的領海面積是

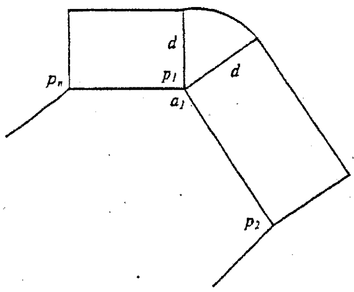
$$(p+\pi d)d.$$

有兩個問題要問你：

(3) 請你完成這問題的證明。

(4) 如果有一個島嶼的形狀恰為圓形，且海岸線總長也是 p，那麼這島嶼的領海面積比凸 n 邊形島國的領海面積大、相等或小呢？請你先猜答案，再實際計算是否猜對。

【參考解答】：(1)如下圖所示，令凸多邊形區域 $P_1P_2P_3\ldots P_n$ 的 P_i 所對應的內角為 α_i。



領海是由 $P_1P_2,P_2P_3,\ldots,P_nP_1$ 為邊向外作寬為 d 的 n 個矩形及頂點 $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_n$ 所在外角所圍成半徑 d 的扇形面積總和。

$P_1P_2,P_2P_3,\ldots,P_nP_1$ 為邊向外作寬為 d 的 n 個矩形面積和為

$$(P_1P_2+P_2P_3+\ldots+P_nP_1)d=pd.$$

頂點 $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_n$ 所在外角所圍成半徑 d 的扇形面積和為

$$\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i)\frac{\pi d^2}{2\pi}=(n\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n))\frac{\pi d^2}{2\pi}=(n\pi-(n-2)\pi)\frac{\pi d^2}{2\pi}=\pi d^2$$

【問題二】：設 $a<b$。函數 $f(x)=4+2x-x^2$ 在區間 $[a,b]$ 上的最小值為 $2a$，最大值為 $2b$，求 a,b 之值。(16 分)

【參考解答】：$f(x)=4+2x-x^2=5-(x-1)^2$

case 1. 當 $a<b<1$ 時，f 在 $[a,b]$ 上遞增　故最大值為 $f(b)=2b$，最小值為 $f(a)=2a$

即 $\begin{cases} 4+2b-b^2=2b \\ 4+2a-a^2=2a \end{cases}$，

解之得 $a=-2,\ b=-2$ （不合）

case 2. 當 $a<1<b$ 時，f 在 $[a,b]$ 上的最大值為 $f(1)=5$　由已知 $5=2b$，$\therefore b=\frac{5}{2}$

$f(b)=f(\frac{5}{2})=5-(\frac{5}{2}-1)^2=5-\frac{9}{4}=\frac{11}{4}>2>2a$

故 f 之最小值發生於 $f(a)=2a$

$4+2a-a^2=2a$，$\therefore a=\pm 2$ （取 $a=-2$）故 $a=-2$，$b=\frac{5}{2}$

case 3. 當 $1<a<b$ 時，f 在 $[a,b]$ 上遞減　故最大值為 $f(a)=2b$，最小值為 $f(b)=2a$

即 $\begin{cases} 4+2a-a^2=2b \\ 4+2b-b^2=2a \end{cases}$，

解之得 $a=2,\ b=2$ （不合）

解答為：$a=-2$，$b=\frac{5}{2}$

【問題三】：在一容器內裝有濃度 10%的溶液 100 公克，注入濃度為 40%的溶液 25 公克，均勻攪拌後，再倒出混合液 25 公克。如此反覆進行下去。設 a_n %代表稀釋 n 次後，溶液的濃度，並令 a_0%=10%(溶液初始湛度)。

(4) 求 a_1 的值。(3 分)

(5) 列出 a_n 與 a_{n+1} 的相關式子。(5 分)

(6) 求 a_n 的一般公式。(9 分)

【參考解答】：

（1）根據題意

$$a_1\% = \frac{100\cdot a_0\% + 25.40\%}{125} \Rightarrow a_1 = 16.$$

（2）根據題意

$$a_{n+1}\% = \frac{100\cdot a_n\% + 25.40\%}{125} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + 8$$

（3）將 $a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n+8$　整理成 $(a_{n+1}-40)=\frac{4}{5}(a_n-40).$

由此關係式得知，數列 (a_n-40) 是首項為 $a_1-40=16-40=-24$，公比 $\frac{4}{5}$ 的等比數列。故

$a_n-40=(a_1-40)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$、

解得 $a_n=40+(a_1-40)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$